

**DELHI
UNIVERSITY
LIBRARY.**

Class No.

Book No.

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

Cl. No. B75:3

168N34

Date of release for loan

Ac. No. 10401

This book should be returned on or before the date last stamped below. An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime



وَلَا تُكَلِّمُوا هَذِهِ الْقَوْمَ فِي دِينِهِمْ وَلَا فِي آيَاتِهِمْ وَلَهُمْ عَذَابٌ أَلِيمٌ

وَلَا تُكَلِّمُوا هَذِهِ الْقَوْمَ فِي دِينِهِمْ وَلَا فِي آيَاتِهِمْ

وَلَهُمْ عَذَابٌ أَلِيمٌ (سورة اعراف آیت ۴۷)

مَنْعِيه

وَلَا تُكَلِّمُوا هَذِهِ الْقَوْمَ فِي دِينِهِمْ وَلَا فِي آيَاتِهِمْ

وَلَهُمْ عَذَابٌ أَلِيمٌ (سورة اعراف آیت ۴۷)

مَنْعِيه

وَلَا تُكَلِّمُوا هَذِهِ الْقَوْمَ فِي دِينِهِمْ وَلَا فِي آيَاتِهِمْ

وَلَهُمْ عَذَابٌ أَلِيمٌ (سورة اعراف آیت ۴۷)

168N31

875:3

10401

B50M1

532

✓
u

[illegible]

۱۴۸-۱۴۷
 ۷۵-۷۴
 ۷۴
 ۱۵-۱۴
 ۱۴-۱۳

۱۴۸
 ۷۵
 ۷۴
 ۱۵
 ۱۴

لر، نر

۱۴۸-۱۴۷
 ۷۵-۷۴
 ۷۴
 ۱۵-۱۴
 ۱۴-۱۳

۱۴۸
 ۷۵
 ۷۴
 ۱۵
 ۱۴

۱۴۸
 ۷۵
 ۷۴
 ۱۵-۱۴
 ۱۴-۱۳

۱۰۶-۱۰۵	چهارم فصل فی سبب	۱۰۶
۱۰۷-۱۰۶	پنجم فصل فی سبب	۱۰۷
۱۰۷	ششم فصل	۱۰۷
۱۰۷	هفتم فصل	۱۰۷
۱۰۷-۱۰۶	هشتم فصل	۱۰۷
۱۰۷	نهم فصل	۱۰۷
۱۰۷	دهم فصل	۱۰۷
۱۰۷	یازدهم فصل	۱۰۷
۱۰۷-۱۰۶	دوازدهم فصل	۱۰۷

فصل پنجم

۱۰۷-۱۰۶	چهارم فصل	۱۰۷
۱۰۷-۱۰۶	پنجم فصل	۱۰۷
۱۰۷-۱۰۶	ششم فصل	۱۰۷

فصل ششم

۱۰۷-۱۰۶	چهارم فصل	۱۰۷
۱۰۷-۱۰۶	پنجم فصل	۱۰۷

فصل هفتم

۱۰۷-۱۰۶	چهارم فصل	۱۰۷
---------	-----------	-----

۱۰۰

کثیره مشهوره ایسی ۱۵۹-۱۵۸

لغوی

۱۰۱

میدان

۱۵۹-۱۵۸

۱۰۲

شهر ۱۵۹-۱۵۸

۱۰۳

۱۵۹-۱۵۸

۱۰۴

لیست

۱۰۵

میدان

۱۵۹-۱۵۸

۱۰۶

۱۵۹-۱۵۸

۱۰۷

۱۵۹-۱۵۸

۱۰۸

لیست

۱۰۹

میدان

۱۵۹-۱۵۸

۱۱۰

لیست

۱۱۱

میدان

۱۵۹-۱۵۸

۱۱۲

۱۵۹-۱۵۸

۱۱۳

$M = \text{mass}$

$M = \text{metacentre}$

$g = \text{acc. due to gravity}$

$G = \text{centre of gravity}$

$S = \text{Surface}$

$s = \text{length of an arc}$

$C = \text{constant}$

$C' = \text{centre}$

$C = \text{centroid}$

$C = \text{point}$

$c = \text{capacity}$

$c = \text{semi-axis}$

$W = \gamma \rho V$

$r = \text{radius}$

$r = \text{distance}$

$r, \theta, \phi = \text{polar co-ordinates}$

$r, \theta, z = \text{cylindrical co-ordinates}$

$R = \text{resultant}$

$R = \text{reaction}$

$t = \text{temperature}$

$T = \text{tension}$

$T = \text{absolute temperature}$

$t = \text{time}$

$h = \text{height}$

$h = \text{depth}$

ک = کمیت

مر = مرکز یا بعد

رج = اسراع بوجه جاذبه ارض

ث = مرکز ثقل

س = سطح

س = قوس کا طول

م = مستقل

ج = مرکز

ث = مرکز پهنی

ج = نقطہ

گ = گنجایش

ج = نیم محور

د = کشاکش

ر = نصف قطر

ف = فاصلہ

ر = قطبہ = قطبی محور

ر = طوی = استوائی محور

س = حاصل

س = تعامل

ت = تپش

ت = تناؤ

ت = تپش مطلق

ت = وقت

ف = ارتفاع

گ = گہرائی

تقریم

p = pressure

د = دباؤ

p = perpendicular

ع = عمود

$$p = \frac{dy}{dx}$$

ع = فرما
فرلا

P = point

ن = نقطہ

P_n = Legendre's nth coefficient

ع = لیجنڈر کا n واں سر

P = power

ط = طاقت

ρ = density

ث = کثافت

f = radius of curvature

م = انحناء کا نصف قطر

σ = density

ث = کثافت

f = acceleration

س = اسراع

f = function

ف = تفاعل

F = force

ق = قوت

k = constant

ک = مستقل

k = radius of gyration

م = گردش کا نصف قطر

K = quarter period

ک = ربعی دور

v = volume

ح = حجم

V = volume

ح، ج = حجم

V = potential fn.

ذ = قوت تفاعل

W = weight

و = وزن

m = mass

ک = کمیت

Modulus	مقیاس
Bodies under constraint	مقید اجسام
Paraboloid	مکافاتی نما
Flexible surface	ملائم سطح
Unduloid	موج نما
Ellipsoid	ناقص نما
Elliptic Integral	ناقصی تکمیل
Elliptic paraboloid	ناقصی مکافاتی نما
Synclastic	نہ انحنائی
Dew point	نقطہ شبنم
Downward pressure	نیچے وار دباؤ
Medial line	وسطی خط
Trim of a ship	وضع (جہاز کی)
Displaced fluid	ہٹایا ہوا سیال
Isothermal	ہم تپشی
Level	ہموار سطح
Air-tight	ہوا بند

Sinuous	لہریلا
Hydrodynamical	ماحرکی
Hydrostatics	ماسکونیات
Focal conic	ماسکی مخروطی
Parameter	مبدل
Homogeneous	متجانس
Equilateral Hyperbola	متساوی المحاور زائد
Isoscelus prism	متساوی الوجہین منشور
Similar and Similarly situated	متشابه اور تشابہا واقع
Variable	متغیر
Variable density	متغیر کثافت
Convex	محدب
Position	محل
Axial plane	محوری مستوی
Helix	مرغولہ
Helicoid	مرغولہ نما
Metacentre	مرکز البعد
Nucleus	مرکزہ
Centroid	مرکز ہندسی
Torsion	مڑوڑ
Surfaces of equipressure	مساوی دباؤ کی سطحیں
Plane	مستوی
Momental ellipsoid	معیاری ناقص نما
Concave	مقعر

Astronomical density

ظلمی کثافت

Fathom

فیدم

Receiver

قابلہ

Rectangular hyperbola

قائم الزائد

Hinge

قبضہ

Bow

قدامہ

Divisibility

قسمت پذیری

Parabola

قطع مکتبی

Force function

قوت تفاعل

Force to a point

قوت مائل بہ نقطہ

Constraint

قید

Constraining forces

قید کرنیوالی قوتیں

Bibliography

کتابیات

Spheroid

کرہ نما

Crank

کرنیک

Centre of mass

کمیت کا مرکز

Step of a helix

گام (مروغہ کا)

Radius of gyration

گردش کا نصف قطر

Surface of revolution

گردشی سطح

Roulette

گرد دنیہ

Pitch

گہائی

Periphery, perimeter

گہیرا

Elastica

لدنیہ

Convolutions

لفیفہ

Anchor-ring

لنگر چلا

Catenary	زنجیرہ
Catenoid	زنجیرہ نما
Stress	زور
Lower limit	زیرین حد
Stern	سکان
Trilinear co-ordinates	سہ خطی محدد
Fluid	سیال
Perfect fluid	سیال کامل
Capillary curve	شعاری منحنی
Scap-bubble	مہا بوبلی ببلہ
Principal curvature	صدری انحناء
Principal axes	صدری محور
Principal tension	صدری تناؤ
Anticlastic	ضد انحنائی
Necessary & sufficient conditions	ضروری اور کافی شرطیں
Normal mode	طبعی حیثیت
Strata	طبقات
Longitudinal	طولی
Deck	عرشہ (جہاز کا)
Transverse	عرضی
Nodoid	عقدہ نما
Element	عنصر، جز
Hetrogeneous	غیر متجانس
Water-section	فاصل آب
Separability	فصل پذیری

Boundary conditions	حدودی شرطیں
Terminal conditions	حدی شرطیں
Specific heat	حرارت نوعی
Adiabatic	حرانگند
Convective equilibrium	حلی توازن
Water line	خط آب
Cycloid	خط تدویر
Line of action	خط عمل
Line of greatest slope	خط میلان اعظم
Shell	خول
Period	دور
Bifurcation	دو شاخگی
Shaft	دھرا
Impulsive tension	دھکا تناؤ
Wall-sided ship	دیوار پہلو جہاز
Sheet iron	ڈھلا ہوا لوہا
Intrinsic pot. energy	ذاتی توانائی بالقوہ
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Quarter-period	ربعی دور
Areal section	رقبئی تراش
Wrench	سینچ
Hyperboloid	زائد نما
Hyperboloid of one sheet	زائد نما اک چادری
Hyperboloid of two sheets	زائد نما دو چادری
Saturn	زحل

Gravitating solid	تجاذبی ٹھوس
Configuration	تشکیل
Counterbalance	تعدیل کرنا
Variation	تغیر
Righting moment	تقویمی معیار
Line of contact	تماسی خط
Tension	تناؤ
Tensile	تناوی
Kinetic energy	توانائی بالفعل
Potential energy	توانائی بالقوہ
Line of floatation	تیراؤ کا خط
Plane of floatation	تیراؤ کا مستوی
Surface of floatation	تیراؤ کی سطح
Floating bodies	تیرنے والے اجسام
Lintearia	نوبیہ
Self-attracting	جاذب بالذات
Life-belt	جان بٹی
Algebraical moment	جبری معیار
Couple	جفت
Product of Inertia	جمود کا حاصل ضرب
Film, membrane	جھلی
Oblate spheroid	چپٹا کرہ نما
Annulus	چنبر
Thread	چوڑی (بیچ کی)

Inextensible	استندادنا پذیر
Freezing machine	انجمادی مشین
Deflection	انحراف
Upward pressure	اوپر وار دباؤ
Apses	اوجین
Mean centre	اوسط مرکز
Conduction	ایصال
Load	بار
Barometer	باریمیا
Upper limit	بالائی حد
Vapour	بخار
Evolute	برپیچہ
Dilatation	لبسط
Incompressible	بے پچک
Lamina	پتہ
Compression	پچکاؤ
Compressible	پچک پذیر
Metacentre	پس مرکز مرکز ثقل
Paddle steamer	پناہانی جہاز
Lune	پہانگ
Turn of a helix	پہیر (مغزلہ کا)
Hold of a ship	پٹا (جہاز کا)
Screw	پیچ
Screw-steamer	پیچ بانی جہاز
Constant of gravitation	تجاذب کا مستقل

فہرست اصطلاحات

نوٹ :- ان اصطلاحات کو اردو حروف تہجی کے لحاظ سے ترتیب دیا گیا ہے۔

Water line area	آب خط رقبہ
Centre of buoyancy	اچھال کا مرکز
Surface of buoyancy	اچھال کی سطح
Calculus of variations	احصائے تغیرات
Inferior limits	ادنیٰ حدود
Flying wheel	اڑ پیم
Restorative moment	استرداد می معیار
Thermal capacity	استعداد حرارت
Meridional section	استوائی تراش
Radiation	اشعاع
Relative equilibrium	اصنافی توازن
Superior limits	اعلیٰ حدود
Extensible	استداد پذیر

قوت کے تجاذبی میدان میں متوازن ہے۔ اگر ایک ٹھوس کرہ ابتداً سب سے اوپر کے سطح میں پوری طرح ڈوبا ہوا ہو اور پھر اسکو آہستہ آہستہ نیچے ڈھکیلا جائے یہاں تک کہ یہ پوری طرح سب سے نیچے سطح میں پوری طرح غرق ہو جائے اور اگر کرہ کا حجم بتقابلہ ہر سطح کے حجم کے چھوٹا ہو تو ثابت کر دو کہ سیالی دباؤ کے خلاف جو کام ہوتا ہے وہ تقریباً

$$C \{ (C_1 - C_2) \Delta h_1 + (C_2 - C_3) \Delta h_2 + \dots + (C_n - C_{n+1}) \Delta h_n \}$$

$$+ (C_n - C_{n+1}) \Delta h_n \}$$

کے مساوی ہے جہاں C اور C کرہ کے ابتدائی اور آخری محلولوں میں اس کے مرکز

پر کے قوس ہیں اور $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ ، حاصل سطحوں پر کے قوس ہیں۔

۸۶۔ دو متجانس کرے Δ کثافت کے بے پیک متجانس سیال میں غرق اور ساکن ہیں۔ کرہوں کے نصف قطر b اور a اور کثافتیں σ اور σ' ہیں۔ کیتوں کی پیمائش تجاذبی کامیوں میں کی گئی ہے۔ کل کثافت کو ایک استوار کردی لحاظ میں بند کر دیا گیا ہے جس سے وہ عین بھر جاتا ہے۔ ثابت کر دو کہ Δ کثافت کے کرہ پر

عمل کرنیوالی کشش اور دباؤ کی سب قوتیں اسی قوت $\frac{4}{3}\pi a^3 \sigma$ (ث - ث) $\frac{4}{3}\pi b^3 \sigma'$ اور

دفاعی قوت $\frac{4}{3}\pi a^3 (\sigma - \sigma')$ (ث - ث) $\frac{4}{3}\pi b^3 (\sigma' - \sigma)$ میں تحویل ہو سکتی ہیں جبکہ قبل الذکر

دفاعی قوت نفاذ کے مرکز سے اور موخر الذکر دوسرے کرہ کے مرکز سے باہرہ عمل کرے۔ ج نفاذ کے مرکز سے اور d دوسرے کرہ کے مرکز سے زیر بحث کرہ کے مرکز کے فاصلے ہیں۔

۸۷۔ کچھ تجاذبی کثافت جسکی سطح ہم قوس ہے سیال سے گھری ہوئی ہے۔ سیال کی کشش بالذات نظر انداز کیجا سکتی ہے ثابت کر دو کہ کسی نقطہ پر کا دباؤ سطح پر کے

قطع ناقص ہے جسکے محاور ۲ و ۲ بت ہیں۔ مانع اور اسطوانہ دونوں اسطوانہ کے محور کے گرد یکساں نزادگی رفتار سے گھوم رہے ہیں۔ ثابت کر دو کہ آزاد سطح کی ممکن شکل ہم ماسکی ناقص اسطوانہ ہے جسکے محاور ۲ و ۲ بت ہیں ایسے کہ

$$س^۲ = (و + ب)^۲ = ۴ \pi ث (ا ب - و ب)$$

۷۹۔ متجانس مانع کی کمیت (ک) اضافی توازن میں ایک ثابت محور کے گرد یکساں نزادگی رفتار سے گھوم رہی ہے اس طرح کہ اس کی سطح کی ہیلیجیت (صہ) چھوٹی ہے۔ اگر کمیت کا مرکز حصہ مرکز پر ایک لامتناہی کثیف مادی نقطہ کی شکل میں منبجہ ہو جائے اور بقیہ حصے (ا۔ صہ) ک کی کثافت کو نسبت ا۔ صہ : صہ میں گھٹا دیا جائے تو توازن کی صورت میں اس نئی سطح کی ہیلیجیت کیا ہوگی اگر گردش کا وقت وہی فرض کیا جائے جو پہلے تھا۔

۸۰۔ یکساں کثافت کا ایک ٹھوس ناقص نما اپنے اقل محور کے گرد گھومتا ہے اور اس کے گرد مختلف کثافت کے متجانس مانع کا ایک غلاف ہے جسے یہ ساتھ لئے رہتا ہے کل کمیت قانون قدرت کے بموجب کشش رکھتی ہے۔ ان شرائط کا معلوم کرنا مطلوب ہے جن کے پورا ہونے پر آزاد سطح ناقص نمائی شکل اختیار کر سکے (Prof. Townsend, Math. of Ed. Times Vol. xxxv)

۸۱۔ ث + ث کثافت کے ٹھوس کرہ کی کچھ تعداد ث کثافت کے سیال میں متوازن سے کل نظام ایک محور گرد میں ہے۔ اگر کل کمیت متوازن ہو تو ثابت کر دو کہ کرہ کی کمیت کا مرکز موجود کرہ کے مرکز پر ہونا چاہیے۔ نیز اگر صرف دو کرے ہوں تو نقطہ تماس پر ان کے درمیان دباؤ ہوگا

$$\frac{۱۶}{۹} \pi و^۳ ب^۳ ث^۲ \left\{ \frac{ث}{و + ب} + \frac{ث}{و + ب} \right\}$$

جہاں و ب کرہ کے نصف قطر ہیں۔

۸۲۔ ایک ٹھوس متجانس ناقص نما کے اندرونی حصہ میں ایک ہم مرکز کرہ سیال خول ہے جو بے پچک متجانس سیال سے بھرا ہوا ہے۔ کل مادہ قانون قدرت کی

سمندر کی گہرائی تقریباً گ (۱۔ صہ جبال) ہوگی جہاں گ استوا پر کی گہرائی اور صہ زمین کی بلندی ہے۔

۷۵۔ اگر مانع ایک ثابت محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو اور اگر اس کے ذرات ایک ایسے قانون کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کر رہے ہوں کہ مساوی دباؤ کی سطحیں ہم محور متشابہ چپٹے کرہ نما ہوں تو ثابت کر دے کہ کسی کرہ نما کی حاصل کشش جس کے ذرات اسی قانون کے بموجب جذب کرتے ہیں دو قوتوں کا حاصل ہوگی جو علی الترتیب استوا پر اور گردش کے محور پر عمود دار ہیں اور علی الترتیب ایسے بدلتی ہیں جیسے جذب ہونے والے نقطہ کا استواء اور محور سے فاصلہ۔

۷۶۔ دفعہ (۱۹۴) کی صورت میں ثابت کر دے کہ تمام مانع میں اوسط دباؤ ناقص نما کے مرکز پر کے دباؤ کا $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔ اگر آزاد سطح کی مسادات

$$1 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2} + \frac{w^2}{r^2}$$

ہو اور مانع کی کمیت ہر دو ثابت کر دے کہ نظام کی توانائی افضل

$$\frac{1}{2} m \{ a^2 + b^2 + c^2 \}$$

ہے جہاں مانع کی کشش کے باعث محوروں ل، م، ن کے سروں پر کی قوتیں (۱) ب، ج ہیں۔ گردش محوری کے گرد ہو رہی ہے۔

۷۷۔ دفعہ (۱۸۸) کی صورت میں مانع کی کمیت کے اندرونی حصہ کے کسی نقطہ پر دباؤ معلوم کر دے جبکہ ل، م، ن اس قدر چھوٹا ہو کہ ل، م، ن نظر انداز ہو سکے۔

اس صورت میں اگر بلندیجیت ن ہو تو ثابت کر دے کہ استوا ہی مستوی پر

کا دباؤ قوت کی تقریباً (۵۔ ۶) (ن) (۱۲) (۱۳) (۱۴) (۱۵) (۱۶) (۱۷) (۱۸) (۱۹) (۲۰) (۲۱) (۲۲) (۲۳) (۲۴) (۲۵) (۲۶) (۲۷) (۲۸) (۲۹) (۳۰) (۳۱) (۳۲) (۳۳) (۳۴) (۳۵) (۳۶) (۳۷) (۳۸) (۳۹) (۴۰) (۴۱) (۴۲) (۴۳) (۴۴) (۴۵) (۴۶) (۴۷) (۴۸) (۴۹) (۵۰) (۵۱) (۵۲) (۵۳) (۵۴) (۵۵) (۵۶) (۵۷) (۵۸) (۵۹) (۶۰) (۶۱) (۶۲) (۶۳) (۶۴) (۶۵) (۶۶) (۶۷) (۶۸) (۶۹) (۷۰) (۷۱) (۷۲) (۷۳) (۷۴) (۷۵) (۷۶) (۷۷) (۷۸) (۷۹) (۸۰) (۸۱) (۸۲) (۸۳) (۸۴) (۸۵) (۸۶) (۸۷) (۸۸) (۸۹) (۹۰) (۹۱) (۹۲) (۹۳) (۹۴) (۹۵) (۹۶) (۹۷) (۹۸) (۹۹) (۱۰۰) (۱۰۱) (۱۰۲) (۱۰۳) (۱۰۴) (۱۰۵) (۱۰۶) (۱۰۷) (۱۰۸) (۱۰۹) (۱۱۰) (۱۱۱) (۱۱۲) (۱۱۳) (۱۱۴) (۱۱۵) (۱۱۶) (۱۱۷) (۱۱۸) (۱۱۹) (۱۲۰) (۱۲۱) (۱۲۲) (۱۲۳) (۱۲۴) (۱۲۵) (۱۲۶) (۱۲۷) (۱۲۸) (۱۲۹) (۱۳۰) (۱۳۱) (۱۳۲) (۱۳۳) (۱۳۴) (۱۳۵) (۱۳۶) (۱۳۷) (۱۳۸) (۱۳۹) (۱۴۰) (۱۴۱) (۱۴۲) (۱۴۳) (۱۴۴) (۱۴۵) (۱۴۶) (۱۴۷) (۱۴۸) (۱۴۹) (۱۵۰) (۱۵۱) (۱۵۲) (۱۵۳) (۱۵۴) (۱۵۵) (۱۵۶) (۱۵۷) (۱۵۸) (۱۵۹) (۱۶۰) (۱۶۱) (۱۶۲) (۱۶۳) (۱۶۴) (۱۶۵) (۱۶۶) (۱۶۷) (۱۶۸) (۱۶۹) (۱۷۰) (۱۷۱) (۱۷۲) (۱۷۳) (۱۷۴) (۱۷۵) (۱۷۶) (۱۷۷) (۱۷۸) (۱۷۹) (۱۸۰) (۱۸۱) (۱۸۲) (۱۸۳) (۱۸۴) (۱۸۵) (۱۸۶) (۱۸۷) (۱۸۸) (۱۸۹) (۱۹۰) (۱۹۱) (۱۹۲) (۱۹۳) (۱۹۴) (۱۹۵) (۱۹۶) (۱۹۷) (۱۹۸) (۱۹۹) (۲۰۰) (۲۰۱) (۲۰۲) (۲۰۳) (۲۰۴) (۲۰۵) (۲۰۶) (۲۰۷) (۲۰۸) (۲۰۹) (۲۱۰) (۲۱۱) (۲۱۲) (۲۱۳) (۲۱۴) (۲۱۵) (۲۱۶) (۲۱۷) (۲۱۸) (۲۱۹) (۲۲۰) (۲۲۱) (۲۲۲) (۲۲۳) (۲۲۴) (۲۲۵) (۲۲۶) (۲۲۷) (۲۲۸) (۲۲۹) (۲۳۰) (۲۳۱) (۲۳۲) (۲۳۳) (۲۳۴) (۲۳۵) (۲۳۶) (۲۳۷) (۲۳۸) (۲۳۹) (۲۴۰) (۲۴۱) (۲۴۲) (۲۴۳) (۲۴۴) (۲۴۵) (۲۴۶) (۲۴۷) (۲۴۸) (۲۴۹) (۲۵۰) (۲۵۱) (۲۵۲) (۲۵۳) (۲۵۴) (۲۵۵) (۲۵۶) (۲۵۷) (۲۵۸) (۲۵۹) (۲۶۰) (۲۶۱) (۲۶۲) (۲۶۳) (۲۶۴) (۲۶۵) (۲۶۶) (۲۶۷) (۲۶۸) (۲۶۹) (۲۷۰) (۲۷۱) (۲۷۲) (۲۷۳) (۲۷۴) (۲۷۵) (۲۷۶) (۲۷۷) (۲۷۸) (۲۷۹) (۲۸۰) (۲۸۱) (۲۸۲) (۲۸۳) (۲۸۴) (۲۸۵) (۲۸۶) (۲۸۷) (۲۸۸) (۲۸۹) (۲۹۰) (۲۹۱) (۲۹۲) (۲۹۳) (۲۹۴) (۲۹۵) (۲۹۶) (۲۹۷) (۲۹۸) (۲۹۹) (۳۰۰) (۳۰۱) (۳۰۲) (۳۰۳) (۳۰۴) (۳۰۵) (۳۰۶) (۳۰۷) (۳۰۸) (۳۰۹) (۳۱۰) (۳۱۱) (۳۱۲) (۳۱۳) (۳۱۴) (۳۱۵) (۳۱۶) (۳۱۷) (۳۱۸) (۳۱۹) (۳۲۰) (۳۲۱) (۳۲۲) (۳۲۳) (۳۲۴) (۳۲۵) (۳۲۶) (۳۲۷) (۳۲۸) (۳۲۹) (۳۳۰) (۳۳۱) (۳۳۲) (۳۳۳) (۳۳۴) (۳۳۵) (۳۳۶) (۳۳۷) (۳۳۸) (۳۳۹) (۳۴۰) (۳۴۱) (۳۴۲) (۳۴۳) (۳۴۴) (۳۴۵) (۳۴۶) (۳۴۷) (۳۴۸) (۳۴۹) (۳۵۰) (۳۵۱) (۳۵۲) (۳۵۳) (۳۵۴) (۳۵۵) (۳۵۶) (۳۵۷) (۳۵۸) (۳۵۹) (۳۶۰) (۳۶۱) (۳۶۲) (۳۶۳) (۳۶۴) (۳۶۵) (۳۶۶) (۳۶۷) (۳۶۸) (۳۶۹) (۳۷۰) (۳۷۱) (۳۷۲) (۳۷۳) (۳۷۴) (۳۷۵) (۳۷۶) (۳۷۷) (۳۷۸) (۳۷۹) (۳۸۰) (۳۸۱) (۳۸۲) (۳۸۳) (۳۸۴) (۳۸۵) (۳۸۶) (۳۸۷) (۳۸۸) (۳۸۹) (۳۹۰) (۳۹۱) (۳۹۲) (۳۹۳) (۳۹۴) (۳۹۵) (۳۹۶) (۳۹۷) (۳۹۸) (۳۹۹) (۴۰۰) (۴۰۱) (۴۰۲) (۴۰۳) (۴۰۴) (۴۰۵) (۴۰۶) (۴۰۷) (۴۰۸) (۴۰۹) (۴۱۰) (۴۱۱) (۴۱۲) (۴۱۳) (۴۱۴) (۴۱۵) (۴۱۶) (۴۱۷) (۴۱۸) (۴۱۹) (۴۲۰) (۴۲۱) (۴۲۲) (۴۲۳) (۴۲۴) (۴۲۵) (۴۲۶) (۴۲۷) (۴۲۸) (۴۲۹) (۴۳۰) (۴۳۱) (۴۳۲) (۴۳۳) (۴۳۴) (۴۳۵) (۴۳۶) (۴۳۷) (۴۳۸) (۴۳۹) (۴۴۰) (۴۴۱) (۴۴۲) (۴۴۳) (۴۴۴) (۴۴۵) (۴۴۶) (۴۴۷) (۴۴۸) (۴۴۹) (۴۵۰) (۴۵۱) (۴۵۲) (۴۵۳) (۴۵۴) (۴۵۵) (۴۵۶) (۴۵۷) (۴۵۸) (۴۵۹) (۴۶۰) (۴۶۱) (۴۶۲) (۴۶۳) (۴۶۴) (۴۶۵) (۴۶۶) (۴۶۷) (۴۶۸) (۴۶۹) (۴۷۰) (۴۷۱) (۴۷۲) (۴۷۳) (۴۷۴) (۴۷۵) (۴۷۶) (۴۷۷) (۴۷۸) (۴۷۹) (۴۸۰) (۴۸۱) (۴۸۲) (۴۸۳) (۴۸۴) (۴۸۵) (۴۸۶) (۴۸۷) (۴۸۸) (۴۸۹) (۴۹۰) (۴۹۱) (۴۹۲) (۴۹۳) (۴۹۴) (۴۹۵) (۴۹۶) (۴۹۷) (۴۹۸) (۴۹۹) (۵۰۰) (۵۰۱) (۵۰۲) (۵۰۳) (۵۰۴) (۵۰۵) (۵۰۶) (۵۰۷) (۵۰۸) (۵۰۹) (۵۱۰) (۵۱۱) (۵۱۲) (۵۱۳) (۵۱۴) (۵۱۵) (۵۱۶) (۵۱۷) (۵۱۸) (۵۱۹) (۵۲۰) (۵۲۱) (۵۲۲) (۵۲۳) (۵۲۴) (۵۲۵) (۵۲۶) (۵۲۷) (۵۲۸) (۵۲۹) (۵۳۰) (۵۳۱) (۵۳۲) (۵۳۳) (۵۳۴) (۵۳۵) (۵۳۶) (۵۳۷) (۵۳۸) (۵۳۹) (۵۴۰) (۵۴۱) (۵۴۲) (۵۴۳) (۵۴۴) (۵۴۵) (۵۴۶) (۵۴۷) (۵۴۸) (۵۴۹) (۵۵۰) (۵۵۱) (۵۵۲) (۵۵۳) (۵۵۴) (۵۵۵) (۵۵۶) (۵۵۷) (۵۵۸) (۵۵۹) (۵۶۰) (۵۶۱) (۵۶۲) (۵۶۳) (۵۶۴) (۵۶۵) (۵۶۶) (۵۶۷) (۵۶۸) (۵۶۹) (۵۷۰) (۵۷۱) (۵۷۲) (۵۷۳) (۵۷۴) (۵۷۵) (۵۷۶) (۵۷۷) (۵۷۸) (۵۷۹) (۵۸۰) (۵۸۱) (۵۸۲) (۵۸۳) (۵۸۴) (۵۸۵) (۵۸۶) (۵۸۷) (۵۸۸) (۵۸۹) (۵۹۰) (۵۹۱) (۵۹۲) (۵۹۳) (۵۹۴) (۵۹۵) (۵۹۶) (۵۹۷) (۵۹۸) (۵۹۹) (۶۰۰) (۶۰۱) (۶۰۲) (۶۰۳) (۶۰۴) (۶۰۵) (۶۰۶) (۶۰۷) (۶۰۸) (۶۰۹) (۶۱۰) (۶۱۱) (۶۱۲) (۶۱۳) (۶۱۴) (۶۱۵) (۶۱۶) (۶۱۷) (۶۱۸) (۶۱۹) (۶۲۰) (۶۲۱) (۶۲۲) (۶۲۳) (۶۲۴) (۶۲۵) (۶۲۶) (۶۲۷) (۶۲۸) (۶۲۹) (۶۳۰) (۶۳۱) (۶۳۲) (۶۳۳) (۶۳۴) (۶۳۵) (۶۳۶) (۶۳۷) (۶۳۸) (۶۳۹) (۶۴۰) (۶۴۱) (۶۴۲) (۶۴۳) (۶۴۴) (۶۴۵) (۶۴۶) (۶۴۷) (۶۴۸) (۶۴۹) (۶۵۰) (۶۵۱) (۶۵۲) (۶۵۳) (۶۵۴) (۶۵۵) (۶۵۶) (۶۵۷) (۶۵۸) (۶۵۹) (۶۶۰) (۶۶۱) (۶۶۲) (۶۶۳) (۶۶۴) (۶۶۵) (۶۶۶) (۶۶۷) (۶۶۸) (۶۶۹) (۶۷۰) (۶۷۱) (۶۷۲) (۶۷۳) (۶۷۴) (۶۷۵) (۶۷۶) (۶۷۷) (۶۷۸) (۶۷۹) (۶۸۰) (۶۸۱) (۶۸۲) (۶۸۳) (۶۸۴) (۶۸۵) (۶۸۶) (۶۸۷) (۶۸۸) (۶۸۹) (۶۹۰) (۶۹۱) (۶۹۲) (۶۹۳) (۶۹۴) (۶۹۵) (۶۹۶) (۶۹۷) (۶۹۸) (۶۹۹) (۷۰۰) (۷۰۱) (۷۰۲) (۷۰۳) (۷۰۴) (۷۰۵) (۷۰۶) (۷۰۷) (۷۰۸) (۷۰۹) (۷۱۰) (۷۱۱) (۷۱۲) (۷۱۳) (۷۱۴) (۷۱۵) (۷۱۶) (۷۱۷) (۷۱۸) (۷۱۹) (۷۲۰) (۷۲۱) (۷۲۲) (۷۲۳) (۷۲۴) (۷۲۵) (۷۲۶) (۷۲۷) (۷۲۸) (۷۲۹) (۷۳۰) (۷۳۱) (۷۳۲) (۷۳۳) (۷۳۴) (۷۳۵) (۷۳۶) (۷۳۷) (۷۳۸) (۷۳۹) (۷۴۰) (۷۴۱) (۷۴۲) (۷۴۳) (۷۴۴) (۷۴۵) (۷۴۶) (۷۴۷) (۷۴۸) (۷۴۹) (۷۵۰) (۷۵۱) (۷۵۲) (۷۵۳) (۷۵۴) (۷۵۵) (۷۵۶) (۷۵۷) (۷۵۸) (۷۵۹) (۷۶۰) (۷۶۱) (۷۶۲) (۷۶۳) (۷۶۴) (۷۶۵) (۷۶۶) (۷۶۷) (۷۶۸) (۷۶۹) (۷۷۰) (۷۷۱) (۷۷۲) (۷۷۳) (۷۷۴) (۷۷۵) (۷۷۶) (۷۷۷) (۷۷۸) (۷۷۹) (۷۸۰) (۷۸۱) (۷۸۲) (۷۸۳) (۷۸۴) (۷۸۵) (۷۸۶) (۷۸۷) (۷۸۸) (۷۸۹) (۷۹۰) (۷۹۱) (۷۹۲) (۷۹۳) (۷۹۴) (۷۹۵) (۷۹۶) (۷۹۷) (۷۹۸) (۷۹۹) (۸۰۰) (۸۰۱) (۸۰۲) (۸۰۳) (۸۰۴) (۸۰۵) (۸۰۶) (۸۰۷) (۸۰۸) (۸۰۹) (۸۱۰) (۸۱۱) (۸۱۲) (۸۱۳) (۸۱۴) (۸۱۵) (۸۱۶) (۸۱۷) (۸۱۸) (۸۱۹) (۸۲۰) (۸۲۱) (۸۲۲) (۸۲۳) (۸۲۴) (۸۲۵) (۸۲۶) (۸۲۷) (۸۲۸) (۸۲۹) (۸۳۰) (۸۳۱) (۸۳۲) (۸۳۳) (۸۳۴) (۸۳۵) (۸۳۶) (۸۳۷) (۸۳۸) (۸۳۹) (۸۴۰) (۸۴۱) (۸۴۲) (۸۴۳) (۸۴۴) (۸۴۵) (۸۴۶) (۸۴۷) (۸۴۸) (۸۴۹) (۸۵۰) (۸۵۱) (۸۵۲) (۸۵۳) (۸۵۴) (۸۵۵) (۸۵۶) (۸۵۷) (۸۵۸) (۸۵۹) (۸۶۰) (۸۶۱) (۸۶۲) (۸۶۳) (۸۶۴) (۸۶۵) (۸۶۶) (۸۶۷) (۸۶۸) (۸۶۹) (۸۷۰) (۸۷۱) (۸۷۲) (۸۷۳) (۸۷۴) (۸۷۵) (۸۷۶) (۸۷۷) (۸۷۸) (۸۷۹) (۸۸۰) (۸۸۱) (۸۸۲) (۸۸۳) (۸۸۴) (۸۸۵) (۸۸۶) (۸۸۷) (۸۸۸) (۸۸۹) (۸۹۰) (۸۹۱) (۸۹۲) (۸۹۳) (۸۹۴) (۸۹۵) (۸۹۶) (۸۹۷) (۸۹۸) (۸۹۹) (۹۰۰) (۹۰۱) (۹۰۲) (۹۰۳) (۹۰۴) (۹۰۵) (۹۰۶) (۹۰۷) (۹۰۸) (۹۰۹) (۹۱۰) (۹۱۱) (۹۱۲) (۹۱۳) (۹۱۴) (۹۱۵) (۹۱۶) (۹۱۷) (۹۱۸) (۹۱۹) (۹۲۰) (۹۲۱) (۹۲۲) (۹۲۳) (۹۲۴) (۹۲۵) (۹۲۶) (۹۲۷) (۹۲۸) (۹۲۹) (۹۳۰) (۹۳۱) (۹۳۲) (۹۳۳) (۹۳۴) (۹۳۵) (۹۳۶) (۹۳۷) (۹۳۸) (۹۳۹) (۹۴۰) (۹۴۱) (۹۴۲) (۹۴۳) (۹۴۴) (۹۴۵) (۹۴۶) (۹۴۷) (۹۴۸) (۹۴۹) (۹۵۰) (۹۵۱) (۹۵۲) (۹۵۳) (۹۵۴) (۹۵۵) (۹۵۶) (۹۵۷) (۹۵۸) (۹۵۹) (۹۶۰) (۹۶۱) (۹۶۲) (۹۶۳) (۹۶۴) (۹۶۵) (۹۶۶) (۹۶۷) (۹۶۸) (۹۶۹) (۹۷۰) (۹۷۱) (۹۷۲) (۹۷۳) (۹۷۴) (۹۷۵) (۹۷۶) (۹۷۷) (۹۷۸) (۹۷۹) (۹۸۰) (۹۸۱) (۹۸۲) (۹۸۳) (۹۸۴) (۹۸۵) (۹۸۶) (۹۸۷) (۹۸۸) (۹۸۹) (۹۹۰) (۹۹۱) (۹۹۲) (۹۹۳) (۹۹۴) (۹۹۵) (۹۹۶) (۹۹۷) (۹۹۸) (۹۹۹) (۱۰۰۰)

جہاں ل اسطوانی نصف قطر ہے۔

۷۸۔ ث کثافت کے تجاؤبی یکساں مانع کی لامتناہی کمیت ل انتہا طویل اور چلے استوار اسطوانے کو لگے ہوئے ہے۔ اسطوانہ کی عمودی تراشش

ہوئی ہو ضرب کے اس حصہ عمل میں خزانہ سے داخل ہوتی ہے اور ضرب کے بقیہ حصہ عمل میں پھیل کر کرہ ہوائی کے دباؤ پر خارج ہو جاتی ہے۔ خارج ہوتے وقت اس ہوا کی تپش ٹھنٹی ہوئی ہوتی ہے اگر اسطوانوں کے حجم H اور C ہوں اور اگر چپکاؤ اور پھیلاؤ کو حرنا کو فرس کر لیا جائے تو ثابت کر دے کہ ہر ضرب میں پہلے اسطوانہ میں جو کام ہوتا ہے وہ $\pi H \times \frac{H}{1} = \frac{\pi H^2}{1}$ ہے اور دوسرے اسطوانہ میں

$$\pi \times \frac{H}{1} \times (H - H) = 0 \text{ ہے۔ کرہ ہوائی کا دباؤ ہے۔ (ڈاکٹر پکینسن)}$$

۱۔ ثابت کر دی متجانس ٹھوس زمین پایاب سمندر سے گھری ہوئی ہے جو دور کے ایک جسم کے زیر کشش ہے۔ اگر پانی پر خود اس کی کشش نظر انداز کر دی جائے تو ثابت کر دے کہ سمندر کی سطح کرہ ی رینگ لیکن اس کا مرکز زمین کے مرکز سے بقدر اس فاصلے کے ہٹا ہوا ہوگا جو اس کے نصف قطر کو تجاوزی جسم کی کشش سیال کے ایک عنصر پر سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے۔

زمین کی کشش اسی عنصر پر
۲۔ اگر زمین کو کرہ ی فرض کر لیا جائے اور اس کے گرد کم گہرائی کا ایک سمندر ہوا اور اگر پانی کے ذرات کی کشش ایک دوسرے پر نظر انداز کر دی جائے تو ثابت کر دے کہ کرہ سمندر کی سطح جیت مساوات

$$\text{استوارہ پر مرکز گریز قوت} = \text{زمین کی سطح پر جاذبہ ارض کی قوت}$$

سے مل جائیگی۔
۳۔ سیال کی کچھ مقدار ایک مادی بیروتر سے کرہ مایکی سطح پر پھیلا دی گئی ہے۔ ثابت کر دے کہ سیال کی آزاد سطح بھی کرہ مایہ ہے اور استوارہ سیال کی گہرائی کو جو نسبت قطب پر کی گہرائی سے ہے وہی نسبت کرہ مایہ کے محور اعظم کو محور اعظم سے ہے۔
۴۔ اگر زمین کے گرد کم گہرائی کا ایک سمندر ہو تو ثابت کر دے کہ عرض بلد پر

$$\frac{۲}{۳} \text{ ٹا } \frac{۱۰}{۱۲} \text{ اور } \frac{۱۰}{۱۲} \text{ سے (ر-و)}$$

جہاں ٹا پانی کی کثافت ہے جبکہ اسکو نہ پچکا یا گیا ہو۔

اس سوال میں حسب ذیل باتیں معلوم ہیں

۱ = ۲ سمر، ۵ سمر، ایک کرہ ہوائی (۱۰ لاکھ ڈالین فی مربع سنتی میٹر) کے لئے پانی کا پچکاؤ = ۵×۵ ، خول کی موٹائی = ۵ ملی میٹر اور ایک مربع ملی میٹر تراش کے پتیلی تار کے طول کو دو چند کرنے کے لئے ۹۰۰ لاکھ ڈالین کی قوت درکار ہوتی ہے اگر اس کی لچک مستقل رہے غیر معلوم مقداروں کو سگس نظام میں معلوم کر دیا اور ثابت کر دیا کہ میں پانی کی کثافت = ۳۵ گرام تقریباً۔

۶۹ — ایک نصف کرہی بلبل پانی پر تیر رہا ہے اس کا نصف قطر ایسا ہے کہ اندرونی و بیرونی دباؤں کے فرق کو جو بیرونی دباؤ سے نسبت ہے وہ ایک صغیر مقدار ہے جسکا مربع نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ بلبل کے اندر پانی کی سطح کی شکل دریافت کر دیا اور ثابت کر دیا کہ بیرونی سطح کے نیچے اس کی بڑی سے بڑی گہرائی ہے

$$\left\{ \frac{۲}{۳} - ۱ \right\} \frac{۱۰}{۱۲} \text{ کر } \frac{۱۰}{۱۲} \text{ جبکہ فرقہ}$$

جہاں بلبل کا نصف قطر ہے اور فی اکائی رقبہ پانی اور ہوا کے لئے جو سطحی توانائی ہے اس کو پانی کے اکائی حجم کے وزن کے ساتھ نسبت دیا ہے۔

۷۰ — گفرڈ (Gaffard) کی ایجاد سی مشین میں دو اسطوانے ہوتے ہیں اور ایک بڑا ہوا کا ذخیرہ جس کی تپش خارجی ہوا کی تپش کے مساوی رکھی جاتی ہے۔ اسطوانوں کے فشارے ایک دہرے پر کے دو گروہوں (Cranks) کے ساتھ لگے ہوتے ہیں اور دہرے کو طاقت کے خارجی ماخذ سے چلایا جاتا ہے پہلے اسطوانے میں ہوا اس قدر پچکائی جاتی ہے کہ اس کا دباؤ دہری ہو جائے جو خزانہ میں ہے اور پھر ٹکندنہ ہوتے ہیں اور ہوا خزانہ میں داخل ہوتی ہے جیسے ایک ضرر کی ٹھیکیل جو جاتی ہے۔ دوسرا چھوٹا اسطوانہ اکین کی طرح عمل کرتا ہے جس میں پچکی

تراش کا انحنائے اعظم $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)$ ہے اور دوسرا عدد ری انحنائے
 $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right)$

۶۵۔ ک کیت کے صابونی جیلے میں ہوا ہے جو کلیہ بائل کی پابندی کرتی ہے۔
 اور جلی کا تناؤ (ت) نصف قطر کی چھوٹی تبدیلیوں سے متغیر نہیں ہوتا۔ جلی محل تمدن
 کے گرد چھوٹے استرارات کر رہی ہے۔ اگر جلی کی کردی شکل میں کوئی تبدیلی
 واقع نہ ہو تو ثابت کر دو کہ استرارات کا وقت $\frac{1}{4} \pi \sqrt{\frac{r}{g}}$ ہے جہاں ہوا کا جوہر نظر انداز کیا
 گیا ہے اور بلبلہ خلا میں رکھا گیا ہے۔ (۲۲۹)

۶۶۔ ج سیدل کے ایک ذخیرہ کو ایک وتر کے گرد جو مرتب کے متوازی
 اور اس سے ک فاصلہ پر ہے ٹھاکر ایک بند سطح حاصل کی گئی ہے۔ اگر اس میں
 ذخیرات کا مانع بھر دیا جائے جیسا کہ زاویہ رشتہ سے محور کے گرد گھوم
 رہا ہے اور اس کو اسی قسم کے مانع میں ڈوبا جائے اور اگر اس میں ایک سوراخ
 ہو جس میں سے بیرونی دائروں کی مانع کی توجہ ہو سکتی ہے تو ثابت کر دو کہ
 محور سے فاصلے پر صدی تناؤ ہونے

$$\frac{\text{ذہ ۲۲ (ک-ر)}}{\text{ذہ ۲۲ (ک-ر)}} \text{ اور } \frac{\text{ذہ ۲۲ (ک-ر)}}{\text{ذہ ۲۲ (ک-ر)}}$$

۶۷۔ اگر ایک صابونی جیلے کے ذرات فاصلے کے معکوس مربع کے قانون
 کے بموجب ایک دوسرے کو دفع کریں اور اگر ذرہ ہو تو ثابت کر دو کہ
 ذہ ۱۶ = رت جہاں ر جیلے کا نصف قطر اور ت تناؤ ہے۔

۶۸۔ پتیل کے ایک کردی خول میں (نصف قطر) آٹا پانی زور سے داخل کیا گیا
 کہ اس کا نصف قطر تک پھیل جاتا ہے۔ اگر خول کی لچک کی شرح سمجھنے میں
 نہ ہو اور پانی کے بچکاؤ کی شرح نہ تو ثابت کر دو کہ خول میں پانی کی مقدار ہے

کا قانون معلوم کرو۔

۶۲۔ اگر یہ دیا جائے کہ بانی کا سطحی تناؤ ۲۰۰ مئی پر ۸۱ ڈاؤن فی منٹ میٹر

ہے اور $\frac{F}{L} = \frac{1}{50}$ ۔ بتاؤ صابوں کے ایک بلبلے کے پھیلاؤ کی شرح دریافت کرو جیسے پیش ت نظر ہوتی جائے۔

۶۳۔ لزج سیال کا ایک قطرہ اپنے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھومتا ہے اور سطحی تناؤ کے سوا کسی قوت کے زیر عمل نہیں ہے اس کی شکل کو ایک گردشی سطح کی شکل مان کر اور ماکو گردش کے محور پر مرکز سے ناپنے سے ثابت کرو کہ نصف الہاری منحنی اس مساوات

$$\frac{r}{R} = \frac{(1 + k^2)}{(1 + k^2) - (1 - k^2) \cos^2 \theta}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں R استوائی نصف قطر ہے۔

۶۴۔ ایک نلی قدرتی نصف قطر R کے قائم مستدیر اسطوانہ کی شکل کی ہے اور کامل طائرہ اوسے سے بنی ہے جو کمونوں کی سمت میں امتداد نا پذیر ہے لیکن ٹیگونی وائرڈ کی سمت میں پکڑا رہے۔ ٹھیک بیٹھنے والی دو تہالیاں اس کے سروں پر اچھی طرح ثبت کر دی گئی ہیں اور پھر دسے جوے و باؤ کی گیس اس میں داخل کی گئی ہے۔ تہالیاں آزادانہ طور پر ایک دوسرے کے قریب آسکتی ہیں۔ ثابت کرو کہ نصف الہاری تراش کی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{F}{L} \right) = \frac{1}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{F}{L} \right) \cos^2 \theta$$

جہاں m لچک ایر دیا و کا تفاعل ہے۔

تمام باؤں کے سطحی کے صدی نصف قطر اغت تہالیوں پر ۲ اور ۱ کی نسبت میں ہوئے ہیں۔

نلی کے مختلف ابتدائی طولوں کے لئے سب سے چوڑے نقطہ پر نصف الہاری

۵۹۔ پانی کا ایک اسطوانی حوض ایک افقی محور پر جھول سکتا ہے۔ یہ محور حوض کی ایک عمودی تراش کا قطر ہے اور اسطوانہ کے ارتفاع کے وسطی حصہ کے نیچے واقع ہے۔ ثابت کرو کہ پانی باہر نکل پڑنے کے پیشتر حوض میں پانی کی مقدار اگر اس کی سطح آزاد ہو (یعنی اگر حوض پر ڈھکن نہ ہو) بہ نسبت اُس پانی کی مقدار کے کم رہ سکے گی جو اس میں رہتی اگر اس پر ڈھکن ہوتا۔ اگر قبل الذکر صورت میں گردش کے محور کے اوپر ف بلندی تک پانی چڑھ سکتا ہو تو ثابت کرو کہ موخر الذکر صورت میں اس کی اس بلندی میں (ف + ۲ کہ ۲) - ف کا اضافہ ہو سکتا ہے جہاں گردش کے محور کے لحاظ سے رقبہ ا کی عمودی تراش کا جہد کا معیار (۱ کہ ۲) ہے۔

۶۰۔ مساوی وزن اور نصف قطر (۱ کہ ۲) کے دو کروی بند غباروں کے اندر ایک ہی قسم کی گیس کرہ ہوائی کے دباؤ π پر مساوی مقداروں میں ہے ایک غبارہ تو امتداد نا پذیر مادہ سے بنایا گیا ہے اور دوسرا امتداد پذیر مادہ سے جسکی لچک کی تہہ راع ہے۔ ان غباروں کو ایک ہی بلندی پر ایک ہلکی رسی کے سروں پر تہاں کیا ہے جو ایک پٹنی چرخ پر سے گزرتی ہے اگر رسی کو کاٹ دیا جائے تو ثابت کرو کہ غباروں کی بلندیوں میں فرق جب وہ توازن میں ہوں

$$\frac{\pi}{3} \text{ کوک } \frac{1}{4} \text{ ہوگا جہاں مساوات } \pi - \text{اور } - \frac{\pi}{8} \text{ ج } \frac{\pi}{8} \text{ ف } = - \text{ کی}$$

حقیقی اصل ہے۔ رسی کا تناؤ ت ہے اور دباؤ π پر ہوا کی کثافت ت ہے۔

تبیش کو مستقل فرض کر لیا گیا ہے۔

۶۱۔ ایک پیکلار بے تنی ہوئی دائری جہلی کے محیط پر ایک استوار انگوٹھی ثبت کر دی گئی ہے۔ اس کے ایک رخ پر سیالی دباؤ عمل کرتا ہے جس سے جہلی ایک گردشی سطح کی شکل اختیار کر لیتی ہے۔ یہ معلوم کیا گیا کہ کوئی چھوٹا مربع جو بے تنی ہوئی حالت میں جہلی پر بنایا جائے اور جس کا ایک ضلع ایک نصف قطر واقع ہو تو تنی ہوئی حالت میں ایک مستطیل میں تبدیل ہو جاتا ہے جس کے ضلعوں کی نسبت مستقل ہے۔ ثابت کرو کہ جہلی کی یہ نئی شکل مخروط ہونی چاہیے۔ اس پر کے سیالی دباؤ

ج و ج انتصابی ہے اور وزن و لائق نما کے وزن کا $\frac{1}{2}$) اوپر کے سرے
ج پر ثابت کر دیا گیا ہے اس طور پر کہ تیراؤ کا مستوی مرکز میں سے گزرتا ہے۔ اگر ناقص نما کو اوسط
محور ب کے گرد ایک محدود زاویہ ط میں گھما دیا جائے تو ثابت کرو کہ جنت کا معیار
جو اس کو اس محل میں رکھے گا

$$و \{ ج - از' جم ط (۱ - ز' جم ط) \} جب ط$$

ہوگا جہاں تراش (۱' ج) کا خود ج مرکز ہے۔

۵۷۔۔۔ جہاز کے عرشہ پر کے وسطی خط سے ج فاصلہ پر وسط میں ک ٹن کیت رکھ دی گئی
ہے جسکی وجہ سے جہاز ایک طرف بقدر چھوٹے زاویہ ط کے جھک جاتا ہے۔
جہاز کا کل مٹاؤ نہ ٹن ہے۔ ثابت کرو کہ اس کیت کی عدم موجودگی میں مرکز ثقل
کے اوپر مرکز مابعد کی بلندی تقریباً $\frac{ج}{ط}$ کے مساوی ہوگی اور اس جگہ کو دوسرے

رتبہ تک صحیح بنانے میں مقدار

$$ک (ب - \frac{۱}{۱} فرج)$$

کا اس میں اضافہ کرنا پڑے گا۔ جہاں خط آب کے اوپر ک کے مرکز ثقل کی
بلندی ب ہے پیندے کی گہرائی گ ہے، خط آب کی تراش کا رقبہ ڈ اور جمود کا
معیار ج ہے جن کا تقریباً معلوم ہونا فرض کر دیا گیا ہے۔

۵۸۔۔۔ تجاذبی کیت میں ایک چھوٹا کردی جوف (نفث قطر = س) ہے جس کو
متجانس بے پچک سیال سے بھر دیا گیا ہے اور کہ کے مرکز پر ک کشش بالکل
معدوم ہے۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا سیالی دباؤ۔ $\frac{۱}{۲} ش ج$ سے کم اور جوف کی سطح

پر کل دباؤ۔ $(ج + \frac{۳}{۲} ش) ش$ سے کم نہیں ہو سکتا۔ جہاں سیال
کی کثافت ش ہے اور تجاذبی کیت کے قوہ کو ذ سے تعبیر کریں تو عنصر فرس کے
لئے جو مرکز سے کسی سمت میں کھینچا گیا ہے مرکز پر $\frac{فرس}{۲}$ کی اقل جبری قیمت ج ہے۔

ضرب میں جو کام ہوتا ہے وہ

$$\pi \left(\frac{1}{1+b} \right) \left(\frac{1}{1+b} \right) (n+b+1) \text{ لک } (1+b) + b$$

کے مساوی ہے اگر نوا کے پھیلاؤ کو ہم پیشی فرض کر لیا جائے جہاں 1 قابلہ کا اور b نالی کا حجم ہے۔

۴۸۔ اگر n تکثیف ہم پیشی ہو تو ایک مکثف کی n دیں ضرب میں جو کام ہوتا ہے اس کو معلوم کرو۔

۴۹۔ 1 حجم کے ایک قابلہ میں اگر b گنجائش کے ایک مکثف کرنے والے پیمپ سے ہوا اس قدر تیزی سے داخل کی جائے کہ ایصال سے حرارت کا جو نقصان ہوتا ہے اس کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے تو ثابت کرو کہ n ضربوں کے بعد قابلہ میں ہوا کا دباؤ k رہے ہوئی کے دباؤ کا $(1+b+n)$ حصہ گنا ہوگا۔ یہ معلوم کرو کہ قابلہ میں پیش کیا ہے اور پچکانے میں جو کام ہوا اسے دریافت کرو۔

نیز قابلہ میں ہوا کا دباؤ معلوم کرو جبکہ ایصال سے پیشی توازن پھر برقرار ہو جائے۔

۵۰۔ دی ہوئی کثیت اور نصف قطر کا ایک ٹھوس کر دی مرکزہ لچکدار سیال $(d = \text{کث})$ کے تباذلی کرہ ہوئی سے گھرا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ دباؤ کا تعین کر نیوالی مساوات ہے

$$\text{فر} = \left(\frac{1}{d} \right) \left(\frac{1}{\text{فر}} \right) + \frac{\pi r^2}{k} d = 0$$

کن شرطوں کے تحت دباؤ کی شکل $\frac{1}{r^2}$ ہو سکتی ہے۔

۵۱۔ اگر یہ مان لیا جائے کہ زمین کے اندر مساوی کثافت کی سطحیں ہم مرکزہ کرے

ہیں اور دباؤ اور کثافت میں ربط $d = \frac{k}{r^2}$ (کث - $\frac{1}{r^2}$) ہے جہاں $\frac{1}{r^2}$ سطح پر کی کثافت ہے تو ثابت کرو کہ

ثابت کرو کہ زمین کے مرکز سے رفاصلہ پر دباؤ د ہے ایسا کہ

$$\text{لوک } \frac{د}{ج} = \frac{ج \text{ ثب } (1 - \frac{1}{n})}{(1 - \frac{1}{n})}$$

جہاں زمین کا نصف قطر ا ہے۔

اگر ن = ۱ تو ثابت کرو کہ ایک کروی غبارے کا حجم جیسا مادہ تمام سمتوں میں مساوی طور پر امتداد پذیر ہے بڑے سے بڑا ہو گا جب راس مساوات

$$د (م - ۱) = \frac{۱}{م} \left\{ ۱ - \frac{۱}{م} \right\} \frac{۱ - \frac{۱}{م}}{۱ - \frac{۱}{م}}$$

سے معلوم ہو جہاں م = $\frac{ج \text{ ثب } ۱}{ج}$ ، چک کی قدر ل، اور غبارے کا قدرتی نصف قطر ک ہے۔ یہ معلوم ہے کہ جب غبارہ زمین سے اٹھتا ہے تو عین بھرا ہوا ہوتا ہے اور اس کا نصف قطر قدرتی ہوتا ہے۔

۴۶ — ایک غبارہ کسی خاص لمحہ میں ف بلندی پر ہے، اس رفتار سے نیچے اتر رہا ہے اور افقی سمت میں اس رفتار سے حرکت کرتا ہے جو اس بلندی پر ہوا کی رفتار ہے۔ اگر ہوا کی رفتار بلندی کے متناسب ہو اور اگر کسی خاص مقام پر اترنے کے مقصد سے گیس کو اس طرح خارج کیا جائے کہ آواز کی رفتار مستقل رہے تو ثابت کرو کہ ابتدائی بلندی کے انداز سے اس فرق کی خطا واقع ہونے سے جس نقطہ پر غبارہ پہنچتا ہے اس نقطہ میں

$$\frac{ن \text{ فرق}}{ک} = ۱ + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۲} \left(\frac{۱}{۲} \right)$$

کی خطا پیدا ہو جائے گی جہاں ک = $\frac{ج \text{ ثب}}{م}$

۴۷ — ثابت کرو کہ سیمٹن (Smeaton) کے ہوا پمپ کی (ن + ۱) دیں

اسکی موٹائی اتنی سمت میں ہر نقطہ پر ایک ہی ہے اور بقابل کے بہت چھوٹی ہے۔
یہ پیارے کے اوپر ارتفاع پر دائری گورہ کتا ہے اور نصف قطر کے ایک
کرہ کے بلند ترین نقطہ پر رکھا ہوا ہے۔ اگر اس میں اتنا پانی ڈالا جائے کہ اس کی
سطح پیارے کے محور کو اس سے بیچ فاصلہ برقیط کرے اور اگر پانی کا وزن
پیائے کے وزن کا چار گنا ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{r}{r + 2l} > \frac{h}{l}$$

۳۴ — ایک مساوی الساقین مثلثی پتہ ا ج ب ساکن ہے اس طرح
کہ اس کا مستوی انقباضی ہے اور اس ج ب کی سطح کے نیچے گ گہرائی
پر ثابت ہے۔ مانع کی کثافت گہرائی کے متناسب ہے۔ اگر پتے کی کثافت اتنی ہو
جتنی کہ مانع کی کثافت گہرائی دہرے ہے اور مثلث کا ارتفاع ف، سمت انقباضی کے
ساتھ زاویہ بنا سے تو ثابت کرو کہ

$$h \text{ دف } 2 \text{ جم } (ط + ط) \text{ جم } 2 (ط - ط) = 3 \text{ گ جم } 2 \text{ جم } 2$$

جہاں زاویہ ا ج ب = ۲ - ط

۳۵ — ۲ ارتفاع اور نصف قطر کے مجوف اسطوانہ کے اندر پانی ہے
اور اسطوانے کے سرے بند ہیں اسکو نصف قطر کے ایک گہرے کرہ پر سطح
رکھا گیا ہے کہ اس کے قاعدے کا مرکز کرہ کے بلند ترین نقطہ کو مس کرتا ہے۔
پانی کا وزن اسطوانے کے وزن کے مساوی ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم
ہوگا اگر اسطوانہ میں پانی کے ارتفاع کا طول مساوات

$$2 - 2 (2 - ط) (ف + لا) = 0$$

کی اصلوں کے درمیان واقع ہو۔

۳۶ — روشنی مکانی نما کی شکل کا ایک بے وزن خول ایک متناہ خول میں رکھا
ہوا ہے جسکا مبدل قبل الکر کے مبدل کا دو چند ہے اس کے اندر سیال ہے

ایسے مستوی سے کاٹ لیا جائے جو اسکے محور پر عمود دار ہے اور اگر اسکو نیچے وار
راس کے ساتھ مانع میں غرق کر کے ایک چھوٹے زاویہ میں پہر دیا جائے تو اسے زاویہ معیار
کے ہوئے حصہ کی مقدار پر منحصر نہیں ہوتا ثابت کر دو کہ اگر $\alpha = \phi$ (لا) تکو نہی
منحنی ہو تو ف کو معین کرنیوالی مساوات ہے

$$[f(\alpha)] = [f(\alpha)] + [f(\alpha)] = [f(\alpha)] + [f(\alpha)] = [f(\alpha)] + [f(\alpha)]$$

جہاں جسم کی کثافت بلحاظ سیال کے ث ہے۔
۳۶ — نصف قطر کے ٹھوس نیم کرہ سے ایک حصہ علیحدہ کر لیا گیا ہے یہ حصہ قائم
اسطوانہ کی شکل کا ہے جس کا ارتفاع ϕ ہے اور جبکہ محور کرہ کا محور اور جس کے قاعدہ
کا مرکز کرہ کا مرکز ہے۔ کرہ کے اس حصہ میں ایک پتلی نمی رکھی گئی ہے جو اس میں
ٹھیک بیٹھ جاتی ہے۔ پھر اس کو نیچے وار راس کے ساتھ ایک سیال میں رکھ کر
تلی میں ϕ کثافت کا سیال ڈالا گیا ہے۔ معلوم کر دو کہ کس قدر سیال اس میں
ڈالا جائے کہ توازن تعدیلی ہو جائے۔ اگر نمی میں α ف ارتفاع تک سیال
داخل کیا جائے تو ثابت کر دو کہ

$$\frac{\phi}{\alpha} = \frac{\rho - \rho'}{\rho'}$$

جہاں ٹھوس جسم کی کثافت ρ ہے۔
۳۷ — ایک جسم متغیر کثافت کے مانع میں تیر رہا ہے۔ اس کے محل میں ذرا سی
تبدیلی کر دی گئی ہے اس طرح پر کہ ہٹائے ہوئے مانع کی کمیت غیر متبدل رہتی ہے۔
اگر نمی گہرائی پر کثافت ρ (ی) ہو اور جسم کی غرق شدہ سطح میں کسی نقطہ
کے محدود (لا، لا، ی) ہوں جبکہ سطح کو حوالے کا مستوی لا فرض کیا جائے
تو ثابت کر دو کہ تیراؤ کے مستوی میں کا وہ نقطہ جسکے گرد جسم گھومتا ہے اس مستوی
کا مرکز ثقل ہے جسکو ایک پترے کے اند خیال کیا گیا ہے جسکی کثافت
نقطہ لا، لا، ی (ی) ہے۔

۳۸ — ایک پیالہ کی بیرونی سطح لی وتر خاص کا ایک مکانی نما ہے اور

سطح کے نیچے جسم کے اور مٹائے ہوئے سیال کے مرکز ثقل کے فاصلوں کا فرق عام طور پر اعظم یا اقل ہو گا بموجب اس کے کہ توازن غیر قائم یا قائم ہو بشرطیکہ مٹائے ہوئے سیال کا وزن تیرنے والی شے کے وزن کے سادہ ہو نیز اگر یہ فرق صفر ہو اور جسم ایک انتصابی مستوی کے لحاظ سے متشکل ہو جو اس خط پر عمود ہے جس کے گرد گزرتا ہے بالامٹاؤ پیدا کیا گیا ہے اور اگر ایک ثابت خط کا میلان جو جسم کے اور اس مستوی کے اندر واقع ہے انتصابی سمت کے ساتھ طے ہو تو چھوٹے اہتزاز کا وقت وہی ہو گا جو سادہ رفاص کا ہوتا ہے جس کا طول $\frac{2\pi}{\omega}$ ہے جو جہاں ک اس خط کے گرد گردش کا نصف قطر ہے جو جسم کے مرکز ثقل

میں سے گزرتا ہے اور مٹاؤ کے محور کے متوازی ہے۔

ان شرطوں کو بیان کر دو ان مسائل کی عمومیت کو محدود کرتے ہیں۔

۳۴ — ایک ناقص مٹاؤ ایک سیال میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چندان ہے سطح تیرتا ہے کہ اس کا اقل محور (۵۲) انتصابی مستوی میں ایک نقطہ کے گرد جو ثابت محور اعظم (۵۲) میں واقع ہے چھوٹے اہتزازات کرتا ہے۔ ثابت کر دو کہ دور

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}}}$$

ہے جہاں ثابت نقطہ کا مرکزی فاصلہ کہ ہے۔

۳۵ — ایک دقیق ریل گاڑی ایک زمین دوڑ راستہ میں جس میں یہ ٹھیک سا مسکتی ہے آنداواز حرکت کر سکتی ہے۔ اسکو ایک سرے پر ساکن رکھا گیا ہے اور ایک انجن دوسرے سرے پر راستہ کے اندر کی ہوا کو غالی کرنا شروع کرتا ہے اور مساوی دقتوں میں مساوی حجم کی ہوا خارج کرتا ہے۔ ثابت کر دو کہ وقت مدت پر گاڑی کا فاصلہ اس سرے سے جہر طرف کہ یہ جا رہی ہے شکل ذیل کی مساوات سے معلوم ہوتا ہے۔

$$\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}}}}$$

۳۵ — ایک گردش جسم میں یہ خاصیت پائی جاتی ہے۔ اگر اس کا ایک حصہ

کناف کا دو چند ہے تیرا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{(1-b)^2}{1-a} > \frac{(1-b)^2}{1-a} \text{ جہاں } m = \frac{(1-b)^2}{1-a}$$

جہاں ناقص مخروط کا ارتفاع t اور اسکے رخنوں کے نصف قطر a و b ہیں۔
تیرا ناقص مخروط افقی محور کے ساتھ تیرتا ہو تو توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{(1-b)^2}{1-a} < \frac{(1-b)^2}{1-a}$$

۲۹۔ کعب کی شکل کے ایک طرف میں مانع ہے کعب کا ضلع 12 و 1 ہے۔
اس کو 12 نصف قطر کے ایک کامل کمرہ سے ثابت کر کے سر پر اس طرح رکھ دیا
گیا ہے کہ وہ ٹکرا ہے۔ طرف کے وزن کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ اگر انتصابی
رخوں کے متوازی مستویوں میں ہٹاؤ پیدا کئے جائیں تو توازن قائم ہوگا بشرطیکہ
مانع کی گہرائی 4 و 4 کے درمیان ہو۔

۳۰۔ ایک متساوی الساقین مثلثی پتھر جسکے اضلاع a و b و c مساوی
ہیں ایک مانع میں جس کی کناف گہرائی کے متناسب ہے نیچے وار اس کے
ساتھ تیرتا ہے۔ اگر a و b و c پر عمود ہو اور اگر پتھر اس طرح تیر سکتا ہو کہ خط ad
انتصابی سمت سے زاویہ θ بنائے تو ثابت کرو کہ اس مساوات

$$a \sin \theta = b \sin \theta = c \sin \theta \text{ (جب } a = b = c \text{)}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ جہاں زاویہ θ a و b و c ہے اور پتھر کی کناف θ ،
اور a و b و c کے مساوی گہرائی پر مانع کی کناف θ ہے۔

۳۱۔ ایک گروشی جسم انتصابی محور کے ساتھ تیرتا ہے۔ اس کے محور کے
ایک ثابت نقطہ پر اوزان رکھ کر اس کو مختلف گہرائیوں تک ڈبو یا گیا ہے سبکی شکل معلوم
کر اگر توازن ہمیشہ تبدیلی رہے۔

۳۲۔ اگر ایک جسم سکون میں تیرے تو ثابت کرو کہ کسی ہٹاؤ کے لئے سیال کی

ان کے انتہائی ارتفاع معلوم کرو تاکہ توازن قائم ہو سکے۔
 ۲۴۔ ایک وزنی مکعب ایک ایسے محور کے محور حرکت کر سکتا ہے جو ایک رخ کے مقابل صنموں میں سے گزرتا اور ان کی تعصیف کرتا ہے۔ اس محور کو افقی طور پر ایک خالی ظرف میں ثابت کر دیا گیا ہے اس طرح کہ مکعب توازن کے محل میں ٹھہرا ہوا ہے۔ کس گہرائی تک سیال کو ظرف میں ڈالا جائے کہ توازن غیر قائم ہو جائے۔ مکعب اور سیال کی کٹھنوں کی بڑی سے بڑی نسبت معلوم کرو کہ یہ ممکن ہو سکے۔

یہ فرض کر کے کہ مکعب نصف غرق ہے اور توازن قائم ہے صغیر بہتر اذکا وقت معلوم کرو۔

۲۵۔ ایک اسطوانہ جس کا محور انقباضی ہے ایک سیال میں تیر رہا ہے جس میں کسبی نقطہ پر کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی ن دیں قوت۔ اسطوانہ کو اتنا نیچے دبا دیا گیا ہے کہ اس کا اوپر والا رخ سیال کی سطح پر عین منطبق ہوتا ہے اور تب اسطوانہ کو چھوڑ دینے پر اسطوانہ سیال کے عین باہر اٹھ آتا ہے۔ ثابت کرو کہ جب اسطوانہ تیر رہا تھا تو غرق شدہ گہرائی کو اسطوانہ کے ارتفاع سے وہی نسبت تھی جو ۱ کو $(2 + \frac{1}{10})$ سے ہے۔

۲۶۔ ایک یکساں گردش مکانی نما کا ارتفاع ف اور عرض خاص ل ہے اور اس کی کثافت اضافی لہذا اس سیال کے جس میں یہ تیر رہا ہے س ہے۔ ثابت کرو کہ غرق شدہ راس کے ساتھ توازن کا صرف ایک محل یقیناً ہوگا اگر

$$f > (2 - 3s)l$$

۲۷۔ رقیق مادہ کا ایک ظرف گردش مکانی نما کی شکل کا ہے اور اس میں مائع ہے ثابت کرو کہ توازن ہمیشہ قائم ہوگا بشرطیکہ اندرونی سیال کی کثافت بیرونی سیال کی کثافت سے بڑی ہو۔ ظرف کا وزن نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

۲۸۔ ایک ناقص مخروط انقباضی محور کے ساتھ ایک مائع میں جسکی کثافت اسکی

۲۰۔ مکانی نما کا ایک حصہ، وتر خاص m اور ایک مستوی سے جو اس سے
 n اور فاصلہ پر محور پر عمود وار ہے کاٹ لیا گیا ہے۔ اگر مکانی نما کا راس ایک
 مانع کی سطح کے نیچے h اور گہرائی پر ثابت کر دیا جائے تو ثابت کر دو کہ یہ ساکن
 رہے گا ایسے کہ اس کا ماسک مانع کی سطح میں ہوگا اگر مانع کی کثافت کو مکانی نما کی
 کثافت سے نسبت $h : 2m$ ہو۔

۲۱۔ سیال کی کچھ گیت (ک) ایک ثابت محور کے گرد دی ہوئی مستقل زاوی رقرار
 کے ساتھ گھومتی ہے اور محور کے ایک نقطہ کی طرف دی ہوئی قوت سے جذب
 ہوتی ہے جو فاصلہ کے تناسب میں ہے۔ سیال کی کثافت کسی نقطہ پر ایک دی ہوئی
 مستقل مقدار اور ایک ایسی مقدار کا مجموعہ ہے جو اس نقطہ پر کے دباؤ سے
 دی ہوئی مستقل نسبت رکھتی ہے۔ آزاد سطح کی شکل معلوم کرو اور ثابت کر دو کہ
 اس کا اقل نصف قطر (ب) اس سادات

ک۔ m پر ہوگا $\frac{h}{2}$ لا فرلا

سے متعین ہوتا ہے جہاں m اور g مستقل ہیں۔
 ۲۲۔ ایک داغ قوت فاصلے کے مربع کے بالعکس متناسب ہے اور اس کا
 مرکز ایک متجانس بے پچک سیال کی آزاد سطح کے نیچے واقع ہے۔ یہ سیال ساکن
 ہے اور جاذبہ ارض کے زیر عمل بھی ہے قوت کی شدت اس نقطہ پر جو سیال
 کی آزاد سطح میں قوت کے مرکز سے انتہا آؤ پر واقع ہے جاذبہ ارض کی شدت
 کے مساوی ہے۔ ثابت کر دو کہ سیال کی بیرونی سطح ایک افقی متقار بی مستوی
 رکھتی ہے اور قوت کا مرکز ایک اندرونی جوف سے محصور ہے جس کی چوٹی سیال
 کی بیرونی سطح میں ہے۔ جوف کا حجم اس کے طول کے رقوم میں معلوم کرو۔

۲۳۔ مربع قاعدے کے ایک قائم منشور کے ساتھ دوسرا منشور جس کا قاعدہ بھی
 مربع ہے چپکا دیا گیا ہے اس طرح کہ ان کے محور منطبق ہیں اور اضلاع متوازی۔ یہ کل نظام
 ایک سیال میں اس طرح جیرتا ہے کہ ان کا مشترک مستوی تیراؤ کے مستوی میں
 ہے۔ اگر منشوروں کے قاعدوں کے اضلاع $2 : 1$ کی نسبت میں ہوں تو

(۲۲۲)

۱۶۔ بے پچک سیال، توڑوں

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \quad \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}$$

کے زیر عمل ساکن ہے جو عملی الترتیب محروں کے متوازی ہیں۔ ایک ذرہ جس کی کثافت سیال کی کثافت سے کم ہے سطح

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

میں کسی جگہ رکھ دیا گیا ہے۔ مزاحمت نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ ذرہ کی رفتار سطح (جسکی تعین مقدار ایک سے ہوتی ہے) سے گزرتے وقت ایسے بدلتی ہے جیسے

۱۷۔ ایک پچک اگر دوسری فضا توازن کی حالت میں ہے جبکہ اس میں کردہ ہوئی کے دو چند کثافت کی ہوا ہے اور اس کا نصف قطر قدرتی نصف قطر کا دو چند ہے۔ اگر بار پیماکا ارتفاع $\frac{1}{2}$ اچھ اتر جائے تو فضا کے ناپ میں صغیرا ہتھراز کا وقت دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک قائم مخروط ایک طرف میں جسکے اندر دو دئے ہوئے سیالوں کی گہرائیاں مساوی ہیں اس طرح ٹکا ہوا ہے کہ اس کا محور انتہائی ہے اور اسکا راس طرف کی جہ کے ساتھ بانڈ دیا گیا ہے۔ قائم توازن کی شرط معلوم کرو۔

۱۹۔ ایک سیدائیاں ڈنڈا ایسے مادہ پر مشتمل ہے جس کی کشش (فاصلہ) کے متناسب ہے۔ اس کے گرد ساکن سیال ہے جو صرف اس کی کشش کے ماتحت ہے۔ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحوں کی نصف النهاری تراشوں کی تفرقی مساوات اس شکل

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0} + \frac{1}{r_1} = 0$$

میں رکھی جاسکتی ہے جہاں ڈنڈے کے سروں سے نقطہ (لاما) کے فاصلے r ، r_0 اور ڈنڈے کے محاذی اس نقطہ پر زاویہ سا بننا ہے۔

مثالث کے راس ب تک پہنچ جائے۔
 اگر مثالث کے رقبہ کو کم سے کم کر دیا جائے اس طور پر کہ پانی کی ندی جوئی گہرائی
 کے لئے کائنات برقرار رہے تو ثابت کر دو کہ

$$\text{س ج} = \frac{\text{س}^2 + ۲\text{س} + ۹}{\text{س} - ۳}$$

$$\text{س ا} = \frac{\text{س}^2 + ۲\text{س} + ۹}{\text{س} - ۱}$$

جہاں بند کی کثافت نوعی س ہے۔
 ۱۰۔ سیال کی کچھ کیت اپنی خود کشش کے زیر عمل توازن میں پہلے ثابت کر دو کہ
 کسی نقطہ (لا، ا، ی) پر کا دباؤ اس مساوات

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لا}} \left(\frac{۱}{\text{جف لا}} \right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ا}} \left(\frac{۱}{\text{جف ا}} \right) + \frac{\text{جف}}{\text{جف ی}} \left(\frac{۱}{\text{جف ی}} \right) = ۱۲$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں ث نقطہ (لا، ا، ی) پر کی کثافت ہے۔
 سیال کی لا متناہی کیت (ایسی کہ د = ث) جہاں کہ مستقل ہے ایک ستوار
 کرومی خول کو گھیرے ہوئے ہے اور خود اپنی کشش کے زیر عمل توازن میں ہے
 لا متناہی پر دباؤ ۱۲ ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کر دو۔

۱۱۔ کششوں کا ایک بل، ایک ستیری استوار راستے (ب کو انقی محل میں
 تھا متا ہے اگر ایک چھوٹا متحرک بوجھ نقطہ گ پر رکھا جائے تو بل یکساں طور پر
 پیچھے رہتا ہے۔ جب بوجھ نقطہ ج پر رکھا جاتا ہے تو سراسر اپنے محل میں غیر متغیر
 رہتا ہے، جب نقطہ د پر تو سراسر اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے، اور جب
 نقطہ ن پر تو راستہ کا نقطہ ق اپنے محل میں غیر متغیر رہتا ہے۔

ثابت کر دو کہ اگ = ج = بگ = د = نگ = گ ق

اور یہ کہ نقطہ ن پر کے ایک بوجھ سے نقطہ س پر جو انحراف پیدا ہوتا ہے وہ اس انحراف
 کے مساوی ہے جو اسی بوجھ کو نقطہ س پر رکھنے سے ن پر پیدا ہوتا ہے۔

ثابت کر دے کہ توازن کی شرطیں پوری ہونگی اگر سطح ایک خاص میلجیت کا لمبوتر اکروہ نما ہو بشرطیکہ دفاعی قوت بہت زیادہ بڑی نہ ہو۔

۵۔ ایک مثلثی رقبہ سیال میں اس طرح ڈبویا گیا ہے کہ اس کا ایک ضلع سیال کی سطح میں ہے۔ اس مثلث میں سب سے بڑے ممکن رقبہ کا قطع ناقص بنا یا گیا ہے۔ ثابت کر دے کہ مثلث کے بقیہ حصہ کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی اس کے

زیر ترین نقطہ کی گہرائی کا $\frac{18}{34} = \frac{9}{17}$ ہے۔

۶۔ سیال برکلیہ نیوٹن کے بموجب جاذب بازاات ہے ایک طرف میں عن بھر جاتا ہے۔ یہ طرف ناقص نما $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ کی شکل کا ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ اور طرف پر اعظم اور اقل دباؤ کے نقطے معلوم کرو۔

۷۔ اگر ایک ذوار بیتہ الا ضلع اپنے کے راسوں کی گہرائیاں a, b, c ، جہ، جہ، جہ ہوں اور رقبہ Δ میں پوری طرح غرق ہو اور اس کے مرکز ثقل کی گہرائی f ہو تو اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$\frac{1}{4}(a + b + c) - \frac{1}{4}(b + c + a + c + b + a) = \frac{1}{4}(a + b + c) - \frac{1}{4}(2a + 2b + 2c) = \frac{1}{4}(a + b + c) - \frac{1}{2}(a + b + c) = -\frac{1}{4}(a + b + c)$

۸۔ ف ارتقاع کا ایک مخروطی ظرف، راس نیچے وار، مائع سے بھر دیا گیا ہے مائع کی کثافت ρ ہے جہاں لا گہرائی ہے۔ اس کو دوسرے ظرف میں جو ایک گردش سطح کی شکل کا ہے ڈال دیا گیا ہے جس میں یہ معلوم ہوا کہ اس کی کثافت ρ' ہے۔ ثابت کر دے کہ ظرف کی شکل اس مساوات

$$a + y = \frac{2}{3} \rho' (a - y) \text{ (ن) سے (لا) سے (ا) سے}$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

۹۔ مثلثی تراش (بج) کا ایک بند، ضلع بج پر پانی کا دباؤ تھا تا ہے۔ ایسی شرط معلوم کر دے کہ زاویہ θ کے گرد یہ بندالٹ نہ جائے جبکہ پانی

(۲۲)

متفرق مثالیں

۱۔ بجکدر سیال کی کچھ مقدار جس کے اجزاء ایک دوسرے کو بوجھ قانون حرکت جذب کرنے ہیں ایک کڑہ میں بھر جاتی ہے جس کے مرکز پر ایک مرکزی قوت

ثابت موجود ہے۔ کڑہ کا نصف قطر ج اور سیال کی کثیت (۲ ک۔ - مہ) ج ہے جہاں

ثابت کہ = د۔ ثابت کرو کہ توازن کی شرطیں پوری ہوتی ہیں اگر ت، راکے بالکس متناسب ہے۔
۲۔ ایک کڑہ (نصف قطر ص) اپانی سے عین بھرا ہوا ہے اور انتصابی محور کے گرد زائوی رفتار مہ کے ساتھ گھومتا ہے اس طرح کہ مہ ص = ۲ ج۔ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی جو سطح کڑہ کی علی التوا قائم قطع کرتی ہے اس میں دباؤ ۳ ج ث ع/۲ ہے جہاں ث پانی کی کثافت ہے۔

۳۔ تابع کی کچھ کثیت تین محدودوں کے مستویوں کے درمیان واقع ہے ان مستویوں میں سے ہر ایک ایسی قوت سے تابع کو جذب کرتا ہے جو فاصلے کے متناسب ہے اور کشش کی مطلق قوتیں مہ، مہ، مہ سلسلہ بوسیقیہ میں ہیں۔ ایک نصف ناقص نما اس طرح ثابت کر دیا گیا ہے کہ اس کا مستوی رخ ایک مستوی پر واقع ہے اور اس کی منحنی سطح دوسرے دو مستویوں کو مس کرتی ہے اس کے محور محدودوں کے محوروں کے متوازی ہیں اور

مہ، مہ، مہ

کے بالکس متناسب ہیں۔

اگر ناقص نما کو ڈبا پ دینے کے لئے سیال کا کافی جوتہ غیر ڈھنپا ہوا حصہ ایک دائرہ سے محدود ہوگا۔

۴۔ تابع کی کچھ کثیت اپنے ذرات کے باہمی جذب کے تابع ہے اور ایک دفاعی قوت تابع کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک مستوی سے پرے ہٹانے کا اثر رکھتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس مستوی سے عمودی فاصلہ۔

کے ساتھ گھومے تو لفظ صغیر دباؤ کی آزاد سطح ہو جاتا ہے۔ ع کی تمام قیمتوں کے لئے
خود وہ ع سے بڑی ہوں یا چھوٹی ثابت کر دے لفظ نے کے استوائی تراش کے عمود وار
تناؤ فی اکائی طول ہے

$$\frac{15}{32} \quad \frac{ع}{ع} \sim$$

جہاں ناقص نما کی قطبی تراش کا رقبہ ہے۔
۱۵۔ ایک کیت کے تقریباً کردی ٹھوس جسم کی سطح پر مانع کی کیت ہے۔
ٹھوس جسم کی سطح کی مسادات ہے $r = \frac{1}{2}(1 + \frac{ع}{ع})$ ۔ ٹھوس اور مانع کلیہ نیوٹن کے
بوجب جذب کرتے ہیں اور کل نظام زاویائی رفتار سے کے ساتھ موسیقی کے محور
کے گرد گھومتا ہے۔ ثابت کر دے خط استوائی سے غیر ڈھنپا ہوا ہوگا اگر

ک > 9 ع/ک $(13 - 12) - 5$ سے $10/2 - 4$ اور قطب غیر ڈھنپے ہوئے

ہونگے اگر ک > 4 ع/ک $(13 - 1) + 5$ سے $10/2 - 3$

جہاں r وہ نسبت ہے جو ٹھوس جسم کی کثافت کو مانع کی کثافت کے ساتھ ہے۔
۱۶۔ یہ اٹک کہ زمین ایک سیال پر مشتمل ہے جو ایک ٹھوس کر دی مرکز کو گھیرے
ہوئے ہے ثابت کر دے کہ پہلی جیت صہ جبکہ صغیر فرض کیا گیا ہے رشتہ

$$\frac{ش/ٹ}{\frac{2 + 5}{4} (ش/ٹ - 1)} = ک$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ک وہ نسبت ہے جو استواء پر مرکزی قوت کو دباؤ کے باؤنڈ
سے ہے۔ ش کل زمین کی اوسط کثافت اور ٹ سیال کی کثافت ہے۔
ذیل کی صورتیں مستند کر دے

(۱) دورے طور پر سیال زمین کی صورت صہ = $\frac{5}{4}$ ع/ک

(۲) ٹھوس مرکز پر بہت پایاب سمندر صہ = $\frac{1}{4}$ ع/ک

۱۷۔ فیچر کا چارہ جی سرے۔ مترجم

۱۲۔ نصف قطر اور ث کثافت کا ایک ٹھوس تجاذبی کرہ مانع سے گھرا ہوا ہے جسکی کثافت ρ اور جبکا حجم $\frac{4}{3}\pi r^3$ (ب ۳ - ۲) ہے۔ کل نظام صغیر زاوی رقتار سے لٹکایا جاتا ہے۔ ثابت کر دو کہ مانع کی آزاد سطح کی شکل رشتہ

$$r = b(1 - \frac{2}{3} \frac{v}{c})$$

سے حاصل ہوتی ہے، جہاں کرہ نماکی صغیر بلبلجیت v

۱۵ اسباب ۲

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{v}{c} \right)$$

اور c دوسرے رتبہ کا لیجنڈر کا سر ہے۔

۱۳۔ ث کثافت اور ρ (ک ۳ - ۲) حجم کے متجانس مانع کی کیت جو

ث کثافت اور ρ نصف قطر کے ایک ثابت ٹھوس کرہ کی مرکزہ کو گھیرے ہوئے ہے قطبی محور کے گرد صغیر زاوی رقتار سے لٹکایا جاتا ہے۔ اس کے ساتھ ٹھوس کے اندر اپنی خود کشش، مرکزہ کی کشش اور ایک ذرہ کی کشش کے زیر عمل گھوم رہی ہے۔ ذرہ کی صغیر کیت k ہے اور وہ قطبی محور پر کرہ کے مرکزہ سے ج فاصلہ پر واقع ہے۔

(۲۱۹) آزاد سطح کی شکل کی تعیین کر دو کہ کرہ کا کوئی حصہ مانع سے خالی نہ ہو اور ثابت کر دو کہ k کے نزدیک ترین کو $\frac{1}{2} \frac{v}{c}$ کے نصف حصہ پر مانع کا حجم مانع کے اُس حجم سے بقدر

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{b} \left(1 + \frac{2}{3} \frac{v}{c} \right)$$

کے بڑا ہے جو اس صورت میں ہوتا جبکہ k نہ ہوتا۔

ایسی صورت میں بحث کر دیکھو ث تقریباً $\frac{1}{2} \frac{v}{c}$ کے مساوی ہو جائے۔

۱۴۔ ایک متجانس تجاذبی سیال ایک استوار خافہ کو پیر کرنے میں عین نا کافی ہے۔ خافہ ایک چھٹے ناقص نما کی شکل میں ہے۔ سیال اضافی توازن میں قطبی محور کے گرد توانائی بالحرکت E کے ساتھ گھوم رہا ہے۔ اگر سیال توانائی بالحرکت E

اشلہ

- ۱۔ نصف قطر کا ایک پتلا کر دی خول ٹ کثافت کے عجاذبی مانع سے عین بھرا ہوا نہیں ہے۔ اگر مانع اضافی توازن میں ایک قطر کے گرد زاویائی رفتار سے گھوم رہا ہو تو ثابت کرو کہ گردش کے محور کے علی القوانم خول کا جو بڑا دائرہ ہے اس کے کسی نقطہ پر سطح دائرہ کی علی القوانم سمت میں تناؤ سہات $(\frac{2}{3}r)$ کے مساوی ہے۔
- ۲۔ ایک استوار کر دی خول عجاذبی سیال سے عین بھر دیا گیا ہے۔ یہ ایک مرکزہ ہے جو ایک دوسرے ملے سیال کے خول سے گھرا ہوا ہے۔ کل نظام کو ایک قطر کے گرد گھمایا گیا۔ ثابت کرو کہ ایک چپٹا کرہ مناسب فاصل کی ممکن شکل ہے۔
- ۳۔ ایک استوار کر دی خول میں دو مائعات ہیں جو آمیز نہیں ہوتے اور کل نظام استوار جسم کی مانند خول کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد گھومتا ہے۔ اس سے بڑی زاویائی رفتار معلوم کرو جس کے لئے مشترک سطح کر دی ہو جائے اور خول کو مس نہ کرے اور ثابت کرو کہ جب زاویائی رفتار اس قیمت سے متجاوز نہیں ہوتی تو کرہ نما کا خروج مرکز خول کے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتا۔
- ۴۔ ٹ کثافت کے مانع کی کچھ کثیت ٹ کثافت کے مانع کی کچھ کثیت سے گھری ہوئی ہے اور کل کثیت پوری طرح ایک غلاف میں بھر جاتی ہے جسکی شکل صغیر بلیجیت صہ کا ایک چپٹا کرہ نما ہے۔ اگر غلاف اپنے محور کے گرد صغیر زاویائی رفتار سے گھومے تو ثابت کرو کہ مشترک سطح کی ممکن شکل صہ بلیجیت کا ایک چپٹا کرہ نما ہے جہاں صہ

$$15 \frac{1}{2} = 11 + \frac{1}{2} (\text{صہ} - \text{صہ}) \text{ ٹ}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

- ۵۔ ایک غلاف صغیر بلیجیت صہ کے ایک لمبوترے کرہ نما کی شکل میں ہے۔ اس کو ٹ + ٹ کثافت کے ایک سیالی مرکزہ اور اس کے گرد ٹ کثافت کے سیال سے بھر دیا گیا ہے اگر یہ اپنے محور کے گرد زاویائی رفتار $(11 \frac{1}{2} \text{ ٹ صہ})$

لیکن

(ک+ک) وٹ = ک ف

$$\therefore \text{سہ} = \frac{\text{مر (ک+ک)}}{\text{ن}}$$

$$\therefore \text{وا} - \text{ب}^2 \text{ب} = \frac{\text{سہ}}{\text{ن}} \left\{ \text{وا} (\text{اہی ک+ک}) - \text{ب} (\text{ا-ہی ک+ک}) \right\}$$

$$= \frac{\text{سہ}}{\text{ن}} \text{وا} \frac{\text{ک}}{\text{ک+ک}}$$

کیونکہ سہ/نٹ اور و-ب چھوٹے ہیں۔

$$\text{اسی طرح } \text{وا} - \text{ج}^2 \text{ج} = \frac{\text{سہ}}{\text{ن}} \left\{ \text{وا} (\text{اہی ک+ک}) + \text{ج} (\text{ک+ک}) \right\}$$

$$= \frac{\text{سہ}}{\text{ن}} \text{وا} \frac{\text{ک+ک}}{\text{ک+ک}}$$

لیکن دفعہ گزشتہ سے

$$\text{وا} - \text{ب}^2 \text{ب} = \frac{\text{سہ}}{\text{ن}} \left\{ \text{وا} - \text{ب}^2 - \left(\frac{\text{وا}}{\text{ن}} - \frac{\text{ب}}{\text{ن}} \right) \right\} + \frac{\text{ب}}{\text{ن}} \frac{\text{ک-ک}}{\text{ک}}$$

$$= \frac{\text{سہ}}{\text{ن}} \left\{ \text{وا} - \text{ب}^2 - \left(\frac{\text{وا}}{\text{ن}} - \frac{\text{ب}}{\text{ن}} \right) \right\} + \frac{\text{ب}}{\text{ن}} \frac{\text{وا} + \text{ب} - \text{ب} - \text{وا}}{\text{ک}}$$

اور صغیر فرق و-ب کے پہلے رتبہ تک صحیح نتیجہ حاصل کرنے کے لئے ہم آخری جزو صفر بنی میں کہ = ب = وا رکھ سکتے ہیں۔ اس طرح

$$\text{وا} - \text{ب}^2 \text{ب} = \frac{\text{سہ}}{\text{ن}} \left\{ \text{وا} - \text{ب}^2 \right\}$$

$$\text{وا} - \text{ج}^2 \text{ج} = \frac{\text{سہ}}{\text{ن}} \left\{ \text{وا} - \text{ج}^2 \right\}$$

اسی طرح

$$\text{پس } \frac{\text{وا} - \text{ب}^2 \text{ب}}{\text{وا} - \text{ج}^2 \text{ج}} = \frac{\text{ک}}{\text{ک+ک}}$$

$$\begin{aligned} & \text{ثانی الذکر} \frac{\text{مہک}}{۱۰} \text{ کے ساتھ مل کر} \\ & = \frac{\text{مہک ف} (۲+۲-۲ \text{ فرجم طہ})}{۲} - \frac{\text{مہک}}{۲} \\ & = \frac{\text{مہک}}{۲} \left\{ ۱ + \frac{۳}{۲} \text{ فرجم طہ} - ۱ \right\} \\ & = \frac{۳ \text{ مہک فرجم طہ}}{۲} \end{aligned}$$

و ا کے متوازی۔

اگر ہم ناقص نمائی شکل مان لیں اور د ا کو محور لا اور گردش کے محور کو محوری قرار دیں تو

$$\begin{aligned} \text{ن} \frac{۲}{۳} &= \text{سہ} (لا فرلا + افرلا) - (اٹ لا فرلا - بٹ افرلا - ج ٹ ی فری) \\ &= \frac{\text{مہک ر فر}}{۳} + \frac{۳ \text{ مہک لا فرلا}}{۳} \end{aligned}$$

اور آزاد سطح کی شکل ہونی چاہیے

$$\text{لا} (سہ - اٹ) + \frac{\text{مہک}}{۲} - \frac{\text{مہک}}{۳} + \text{ما} (سہ - بٹ) - \frac{\text{مہک}}{۲} =$$

$$- ی (ج ٹ + \frac{\text{مہک}}{۲}) = \text{مستقل}$$

$$\text{لا} (اٹ - \frac{\text{مہک}}{۲} - سہ) = \text{ب} (بٹ + \frac{\text{مہک}}{۲} - سہ)$$

$$= ج (ج ٹ + \frac{\text{مہک}}{۲})$$

اب چونکہ کمیتیں اپنے مرکز نقل ٹ کے گرد زائے زقار سے گھوم رہی ہیں

$$\therefore \text{سہ} \times \text{وٹ} = \frac{\text{مہک}}{۲}$$

اشکال بالا میں جن کو بالا جازت متذکرہ صدر ڈاروں کے دوسرے مقالہ سے لیا گیا ہے نقطہ دار خط جیکو بی ناقص نما کو تعبیر کرتا ہے اور دوسرا سختی ناسپاتی نما شکل کو۔ اوپر والی شکل استوائی تراش اور پچی نصف النہاری تراش ہے تشاگل کے مستوی میں۔

۲۰۴۔ چھوٹی ہلیجیجیوں کے بٹھوس متجانس ناقص نما کی کشش کے لئے حسب ذیل جملے کھونٹے والے مانع کی کمیتوں کی اختیار کردہ اشکال کی محبت میں اکثر فیثابت ہو چکی ہیں اگر (ا، ب، ج) نیم محور ہوں ایسے کہ ب = (۱ - ص) اور ج = (۱ - ا) (ش)

تو کسی اندرونی نقطہ (لا، ما، ی) پر کشش کے اجزائے ترکیبی ہیں

ا، ب، ج، ث، ی

جہاں

$$ا = \frac{۲}{۳} \pi (۱ - \frac{۲}{۵} ص - \frac{۲}{۵} ا) (ش)$$

$$ب = \frac{۲}{۳} \pi (۱ + \frac{۲}{۵} ص - \frac{۲}{۵} ا) (ش)$$

$$ج = \frac{۲}{۳} \pi (۱ - \frac{۲}{۵} ص + \frac{۲}{۵} ا) (ش)$$

ان جملوں کو متشاگل صورت میں اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے

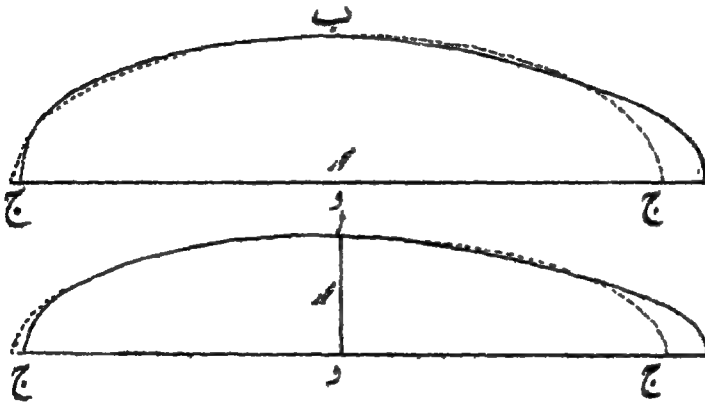
$$ا = \frac{۲}{۳} \pi (۱ - \frac{۲}{۵} ب - \frac{۲}{۵} ج) (ش) \text{ وغیرہ}$$

$$ب = \frac{۲}{۳} \pi (۱ - \frac{۲}{۵} ا - \frac{۲}{۵} ج) (ش) \text{ یا اس طرح وغیرہ}$$

$$ک = \frac{۱}{۳} \pi (ا + ب + ج) (ش) \text{ جہاں}$$

۲۰۵۔ مثال۔ متجانس مانع کی کمیت ک اور ک کمیت کا ایک دُور رکھا ہوا گروہ اضافی توازن میں اپنے مرکز ثقل کے گرد چھوٹی یکساں زاوی زئار سے گھوم رہے ہیں۔ ثابت کردہ کہ مانع کی آزاد سطح صغیر ہلیجیجیوں کا ناقص نما ہے جس کا سب سے

کیونکہ پوائنٹس کے مقالہ میں جو شکل کھینچی گئی ہے وہ ناسپاتی کے متشابه ہے۔ مزید تحقیقات سے معلوم ہوا کہ شکل ناسپاتی سے اتنی مشابہت نہیں رکھتی جتنی کہ پہلے فرض کی گئی تھی۔ ڈارون نے اس پر دو مقالوں میں بحث کی ہے اور دوسرے تقریب تک اس کی شکل کا تعین کیا ہے وہ شاخوں کے نقطہ پر جیکوبی ناقص نما کے محوروں میں نسبت $45.046 : 81398 : 188583$ ہے اور $2/112$ ٹ = 512200 اور ناسپاتی نما شکل جیکوبی کے اس ناقص نما سے ذرا سا فرق رکھتی ہے



جو اپنے سب سے لمبے محور کے ایک سرے پر ابھرا اور دوسرے پر گنڈ ہوتا ہے۔

Loc. cit. p. 347, also *Figures d'équilibre d'une masse fluide*, p. 161.

"On the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid," *Phil. Trans.* Vol. 198 A (1901), p. 301, or *scientific papers*, Vol. III p. 288, and "The stability of the pear-shaped figure of equilibrium of a rotating mass of liquid," *Phil. Trans.* Vol. 200 A (1902), p. 251, or *Scientific Papers*, Vol. III. p. 317.

ان اشکال کی تائیت پر ایک سلس اور دلچسپ مضمون، *The Genesis of Double Stars*.

میں بہت آسان بحث کی گئی ہے۔ یہ مضمون *Darwin and Modern Science* کے

باب بست و ہشتم میں اسی معنی کا لکھا ہوا ہے۔

کے درج کی گئی تھی۔ ان نتیجوں کو قائم کرنے کی کوشش میں پوانکارے نے ایک مشہور و مقبول مقالہ لکھا جو ۱۸۸۵ء میں (Stockholm) میں شائع ہوا۔ اس مقالہ میں توازن کی شکل کے مسئلہ پر زیادہ عام طریقہ سے بحث کی گئی ہے۔ اس میں بتایا گیا ہے کہ توازن کی ممکن اشکال خطی سلسلہ بناتی ہیں یعنی ایسا سلسلہ جو ایک تہا تبدیل پر منحصر ہوتا ہے، مثلاً زاویہ زرخار پر اور ایسا کہ تبدیل کی ہر قیمت کے جواب میں ایک اور صورت ایک شکل یا اشکال کی ایک محدود تعداد حاصل ہوتی ہے اور جبکہ اشکال ایک سلسلہ طریقہ سے بدلتی ہیں جب کہ تبدیل بدلا جاتا ہے۔ اس طرح میکلا رن کے کردہ ایک خطی سلسلہ بناتے ہیں اور جیکوبی کے ناقص نما دوسرا۔ یہ ہو سکتا ہے کہ ایک ہی شکل دو مختلف سلسلوں سے تعلق رکھے۔ اس طرح کی شکل دو شاخگی کی ایک صورت ہے۔ مثلاً کردہ نماؤں کے سلسلہ کا ایک خاص رکن ایسا ہے جو جیکوبی کے ناقص نما کے سلسلہ سے تعلق رکھتا ہے۔ پوانکارے نے اس مقالہ میں توازن کی اشکال کی قانینیت کے مسئلہ پر بھی بحث کی ہے اور یہ بتایا ہے کہ اگر اشکال کا ایک سلسلہ دو شاخگی کی شکل کی حد تک قائم ہو تو اس نقطہ کے بعد اشکال غیر قائم ہوجاتی ہیں۔ قائم اشکال اب دوسرے سلسلہ سے متعلق ہوجاتی ہیں جو دو شاخگی کی شکل میں شامل ہوتا ہے۔ اس طرح میکلا رن کا کردہ نما اس وقت تک قائم ہوتا ہے جب تک کہ اس کا خروج المکرز ۸۱۲۶ سے کم ہو جو دو شاخگی کا نقطہ ہے اور اس نقطہ سے جیکوبی کے ناقص نما قائم ہو جاتے ہیں۔ جیکوبی کے ناقص نماؤں کے سلسلہ میں دو شاخگی کے نقطہ (Lame) کے تقاطعوں کی مدد سے معلوم کرنے کی کوشش میں پوانکارے نے دریافت کیا کہ توازن کی اشکال کے سلسلوں کی تعداد لامتناہی ہے تمام اشکال لمحاظ ایک مستوی کے جو گردش کے محور پر عمود وار ہوتا ہے متشکل ہوتی ہیں۔ تمام اشکال کم از کم ایک متشکل کا مستوی رکھتی ہیں جو محور میں سے گزرتا ہے اور ان میں سے بعض گردش کی اشکال ہیں۔ ان اشکال میں صرف ایک قائم ہوتی ہے اور اس صورت میں متشکل کے صرف دو مستوی ہوتے ہیں۔ یہ وہ شکل ہے جو جیکوبی کے ناقص نماؤں کے سلسلہ میں پہلی دو شاخگی سے پیدا ہوتی ہے اور ان کو توازن کی ناسپاتی متشکل کہا گیا ہے

$$6 = \frac{1}{2} \text{ سہ } 2$$

(۳۱۳) بیرونی جانب حاصل عادی قوت $\frac{6}{\text{جہ } 6}$ ہے اور توازن کے لئے آزاد سطح کے ہر نقطہ پر $\frac{6}{\text{جہ } 6}$ منفی ہونا چاہیئے مگر ان کے مسئلہ سے

$$\frac{6}{\text{جہ } 6} \text{ فرس} = \frac{6}{\text{لف } 2} \text{ فرلا فرما فری}$$

جہاں پہلا مکمل سطح پر اور دوسرا سیال کے کل حجم کے اندر لایا گیا ہے۔ اور

$$\text{لف } 2 = \text{لف } 2 + \text{سہ } 2 = - \text{سہ } 2 + \text{سہ } 2$$

$$\text{اس لئے } \frac{6}{\text{جہ } 6} \text{ فرس} = 2 (\text{سہ } 2 - \text{سہ } 2) \times \text{حجم}$$

اور اگر $\text{سہ } 2 < \text{سہ } 2$ تو داہنی جانب کا جملہ مثبت ہے جس کے یہ معنی ہیں کہ سطح کے چند نقطوں پر حاصل قوت کی سمت بیرونی جانب ہے اور اس لئے توازن ناممکن ہے۔
۲۰۳ — توازن کی اور شکلیں۔ ان اشکال کے علاوہ جن پر ہم نے غور کیا ہے حلقہ نما (Annulus) پر سب سے پہلے لاپلاس نے غور کیا جس کا تعلق زحل کے چہلوں سے ہے اور اس وقت سے اس مصنوع پر بہت سی تحقیقات ہو چکی ہے۔

کیلن اور لیبٹ کی (Natural Philosophy) طبع دوم کے دفعہ ۷۷۸ میں نتیجوں کی ایک تعداد جو مذکورہ بالا اشکال کی قائمیت سے متعلق ہیں نیز ثبوت

$$\text{لف } 2 = \text{سہ } 2$$

سے (Mecanique Celeste, Tome II. p. 155) نیز (Tisserand) کی

(Mecanique Celeste) جلد دوم کے ابواب نہم، دہم، دوازدہم دیکھو جن میں لاپلاس

سکرک میکول، اور (Mme Kowalewsk) کی تحقیقاتوں پر بحث کی گئی ہے۔

$$0 = \frac{لا فرلا}{ب} + \frac{لا فرلا}{ب}$$

کے ساتھ متماثل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$سہ = ۲۴ ث ۱/ب (۱ + ب)$$

اس سے سہ کی قیمت ہوتی ہے اگر ۱، ۱، ب دے گئے ہیں۔ لیکن اگر سہ، ۱، ۱ دے جائیں تو چونکہ

$$\frac{۱ - ب}{ب + ۱} = \frac{۱ - ب}{ب + ۱}$$

اس لئے نقیسی اسطوانہ توازن کی ممکن شکل نہیں ہوگا سوائے اُس صورت کے جبکہ

$$سہ > ۲۴ ث$$

۲۴۔ پوانکارے کا مسئلہ۔ ہم نے یہ دیکھا ہے کہ جب کوئی ناقص نما، اضافی توازن کی ایک ناممکن شکل ہوتا ہے اگر

$$سہ / ۲۴ ث < ۱۸۶۰۹$$

ایک چٹپاکیہ نما ناممکن شکل ہوتا ہے اگر سہ / ۲۴ ث < ۲۲۴۷ اور ایک ناقصی اسطوانہ

ناممکن شکل اگر سہ / ۲۴ ث < ۵۔ پوانکارے نے ثابت کیا کہ اگر سہ / ۲۴ ث < ۱

تو توازن کی کوئی شکل ممکن نہیں ہے۔ کیونکہ توازن کی ایک ضروری شرط یہ ہے کہ آزاد

سطح کے ہر نقطہ پر کشش اور مرکز گریز قوت کے حاصل کی سمت اندرونی جانب ہو ورنہ

ایک حصہ جدا ہو جائے گا فرض کرو کہ تجاذبی قوتوں کا قوتہ فہ ہے اور محور سے فاصلہ

ہے اور فرض کرو کہ

۱۔ دیکھو Bulletin Astron. Tome II. p. 117 or figures d'équilibre d'une masse fluide, P. 11.

اگر $۲۲۴۷ < \frac{۲۲}{۲} \text{ ث}$ ۱۸۷۰.۹ تو دو چپے گرہ نما،
اگر $۱۸۷۰.۹ < \frac{۲۲}{۲} \text{ ث}$ ، تو دو چپے گرہ نما اور ایک ناقص نما
جس کے تینوں محاور غیر مساوی۔

۲۰۰۔ ہم نے دفعہ (۱۹۴) میں دیکھا ہے کہ جیکوبی کے ناقص نما کی ردیفوں میں چھوٹی نہیں ہو سکتیں۔ درحقیقت ایک محور ہر صورت میں گردش کے محور کا کم از کم ۲۲ گنا ہے۔ جیکوبی کے ناقص نماؤں پر تفصیلی بحث کرتے ہوئے جس میں بعدی بعد اول اور اشکال شامل ہیں ڈارون یہ بتاتا ہے کہ ناقص نما جیسے لمبا ہوتا جائیگا ویسے اس کے گھومنے کی رفتار سست پڑتی جائے گی اور جب زاویہ رفتار مسلسل گھٹتی جاتی ہے تو معیار حرکت کا معیار مسلسل بڑھتا جاتا ہے۔ اس نے یہ بھی بتایا ہے کہ لمبے ناقص نما تقریباً گردش کے ناقص نما ہیں جن کے گردش کا محور گھومنے کے محور پر علی القوائے ہے۔
۲۰۱۔ ناقصی اسطوانہ۔ ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ نظری طور پر متجانس تجاذبی مائع کی لاتناہی کیت کی سطح کی ایک ممکن شکل ناقصی اسطوانہ ہے جبکہ مائع ہستوار جسم کے مانند اسطوانے کے محور کے گرد گھوم رہا ہو۔

(۲۱۲)

اگر ۱ اور ۲ نیم محور ہوں تو کسی اندرونی نقطہ (لاما) پر کشش کے اجزاء ترکیبی ہیں

$$\frac{۲۲ \text{ ث } ۱}{۱ + ۲} \text{ اور } \frac{۲۲ \text{ ث } ۲}{۱ + ۲}$$

(کیلوں اور ٹیٹ، دفعہ ۴۹۴) اور اسلئے آزاد سطح کی مساوات ہے

$$\left(\frac{۲۲ \text{ ث } ۲}{۱ + ۲} - \text{سنہ} \right) + \left(\frac{۲۲ \text{ ث } ۱}{۱ + ۲} - \text{سنہ} \right) = ۰$$

اس مساوات کو

لے دیکھو "On Jacobi's Figure of Equilibrium for a rotating mass of fluid."

Proc. Royal Soc. Vol. XLI. (1887) p. 319, or Scientific Papers,

Vol. III. p. 119.

اسی طرح ج > ب۔

۱۹۹ — ہم دیکھتے ہیں کہ دفعہ ۱۹۴ میں (ا، ب، ج) کے لئے جو جملے دئے گئے ہیں وہ اُن جملوں میں تحویل ہو سکتے ہیں جو دفعہ (۱۹۳) میں مندرج ہیں اگر (ا) کی بجائے ج (۱ + ل) ، (ب) کی بجائے ج (۱ + ز) اور ج (۱ + ۶) کی بجائے ج (۱ + ۶) لکھا جائے اُس طرح دفعہ (۱۹۴) کی مساواتیں (ب) (ج) (د) وہی ہیں جو دفعہ (۱۹۳) کی مساواتیں (۳) اور (۴) ہیں۔ اگر سیال کی نسبت ک دی جائے تو ایک اور مساوات پے ۴ ث ل ب ج = ک حاصل ہوتی ہے۔ اس مساوات اور دفعہ (۱۹۴) کی مساواتوں (ب) (ج) سے ل ب ج، کا تعین ک، ث اور سہ کی رقوم میں ہو سکتا ہے۔

ان مساواتوں کو سی۔ او۔ میئر (C. O. Mayer) نے دریافت کیا اور ٹسرنیڈ (Tisserand) کی کتاب *Traite de Mecanique*

Celeste Tome II کے باب ہفتم میں بھی ان کی پوری تشریح موجود ہے جس میں یہ بتایا گیا ہے کہ سہ / ۲ ث کی اعظم قیمت ۱۸۴۰۹ ہے جو جیکوبی ناقص نما کو توازن کی ایک ممکن شکل بناتی ہے اور اس خاص قیمت کے لئے ناقص نما ایک گردش میں ناقص نما ہے جو میٹارن کے ایک کرہ نما پر منطبق ہوتا ہے۔ مزید برآں یہ بھی بتایا گیا ہے کہ دفعہ (۱۹۴) کی مساوات (ب) کے بائیں جانب کا ث ل ب ج اس قیمت سے ایک یگانہ قیمت اعظم اختیار کرتا ہے اور اس سے چھوٹی قیمتوں کے لئے ایک اور صرف ایک ناقص نما حاصل ہوتا ہے۔

میٹارن کے کرہ نماؤں اور جیکوبی کے ناقص نماؤں سے متعلق نتیجوں کا خلاصہ اس طرح لکھ سکتے ہیں :-

اگر سہ / ۲ ث < ۲۲۴۴ و تو کوئی کرہ نما یا ناقص نما نہیں

۵ Crelle's Journal, Tome XXIV. (1842)

۵ اس تشریح کے خلاصہ کے لئے دیکھو *Traite de Mecanique Rationnelle, Tome*

جملہ منفی ہونا چاہیے۔

پس یہ معلوم ہوتا ہے کہ

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{c}$$

اور اس لئے مقادیر a اور b میں سے جو مقدار چھوٹی ہے اس سے c چھوٹا ہے۔
زاویائی رفتار معلوم کرنے کے لئے ہم جانتے ہیں کہ

$$s^2 = (a^2 - b^2)$$

$$= \frac{6}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 6)}$$

اور اس لئے اگر a و b سے مختلف ہے تو

$$s^2 = \frac{6}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + 6)} \dots (جھ)$$

اور چونکہ یہ جملہ ایک مثبت مقدار ہے اس لئے s کی ایک ممکن قیمت حاصل ہوتی ہے اور یہ ثابت ہو گیا کہ ناقص نما، آزاد سطح کی ایک ممکن شکل ہے جب کہ اس ناقص نما کے تیوں محور غیر مساوی ہوں اور مانع سب سے چھوٹے محور کے گرو گھوم رہا ہو۔

۱۹۸۔ c کا سب سے چھوٹا محور ہونا اس طرح بھی ظاہر ہے

$$s^2 = \frac{6}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

$$= \frac{6}{c^2} \left\{ \frac{1}{c^2 - a^2} - \frac{1}{c^2 - b^2} \right\}$$

$$= \frac{6}{c^2} \frac{1}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}$$

جس سے یہ ثابت ہوتا ہے کہ s کے حقیقی ہونے کے لئے یہ ضروری ہے کہ $c > a$ اور (۲۱)

ا ب (ب-ا) - (ا-ب) ج (ج-ب) = ۰ (ع ۱)

اب اگر $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} (ا+ب) (ب+ج) (ج+ا) \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

اور اگر مانع کی کیت ہو تو

$$ا = \frac{1}{2} \frac{ج}{(ا+ب)} \quad ب = \frac{1}{2} \frac{ا}{(ب+ج)} \quad ج = \frac{1}{2} \frac{ب}{(ج+ا)}$$

$$ج = \frac{1}{2} \frac{ب}{(ج+ا)}$$

تب مساوات (ع ۱) ہو جاتی ہے

$$۰ = \left\{ \frac{ج}{ا+ب} - \frac{ا}{ب+ج} \right\} \frac{ب}{ج+ا}$$

اگر ا، ب سے مختلف ہو تو محوروں کے درمیان جو ربط ہے اُس سے مساوات

(۲۱۰)

$$\frac{ب}{ج+ا} = \left(\frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ج} - \frac{ج}{ا} \right) \frac{ا}{ب+ج} \quad ۰ = \dots (ع ۲)$$

پوری ہوئی چاہیئے۔

اگر ا اور ب معلوم ہوں تو اس مساوات سے ج کا تعین ہو جاتا ہے

اور چونکہ داہنی طرف کا جملہ منفی ہے جبکہ ج = ۰ اور مثبت ہے جبکہ ج = ∞ اس لئے ج کی ایک قیمت حقیقی ہونی چاہیئے جو مساوات بالا کو پورا کرے۔

چونکہ $\frac{۳}{۶}$ مثبت ہے اور چونکہ

$$\frac{ا}{ب} + \frac{ب}{ج} - \frac{ج}{ا}$$

مثبت ہے اگر ع کافی بڑا ہو اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب ع چھوٹا ہو تو یہ آخری

تعبیر نہیں کر سکتی جب تک کہ 'م' میں سے دو مقداریں معدوم نہ ہو جائیں۔
 مسٹر گرین ہل نے یہ بیان کیا ہے گردش کے محور کے سرے پر ابع کا ذرہ صرف
 ابع کی کشش کے زیر عمل ساکن رہے گا کیونکہ اس نقطہ پر جملہ سمتیں معدوم ہو جائیں گی۔
 پس ذرہ پر کی کشش سطح کے عماد کی سمت میں ہونی چاہیئے جو صرف
 محور کے سرے کی صورت میں درست ہے۔

۱۹۷۰ — جیکوبی کے مسئلہ کا حسب ذیل ثبوت اے۔ اسمتھ نے ۱۸۳۸ء میں
 (The Cambridge Mathematical Journal) کی پہلی جلد صفحہ ۹

میں دیا ہے۔

اگر ابع کی کچھ کیت استوائیہ جم کے مانند زاویائی رفتار سے محور سے گزرنے والے
 گھومے اور اگر نقطہ (لا، ا، ی) پر کشش کے اجزاء ترکیبی لا، ما، اے
 ہوں تو آزاد سطح کی مساوات ہوگی

$$(لا - سلا) فرلا + (ما - سلا) فرما + اے فری = ۰$$

اب اگر آزاد سطح ناقص بنا ہو تو

$$لا = (لا، ما = ب، ما = ج، ی$$

جہاں 'ب' 'ج' مختصر نہیں ہیں لا، ا، ی پر۔

پس اگر لا، ب، ج ناقص بنا کے نصف محور ہوں تو مساواتوں

$$(ا - سلا) فرلا + (ب - سلا) فرما + ج ی فری = ۰$$

$$\frac{لا}{ا} فرلا + \frac{ب}{ب} فرما + \frac{ج}{ج} فری = ۰$$

کو بشرط امکان متطابق کرتا ہے۔ اس لئے مساواتیں

$$(ا - سلا) فرلا + ب - سلا = ج، ج = \frac{لا}{ج}$$

پوری ہونی چاہئیں جن سے لا اور سلا کو رابطہ کرنے سے حال ہوتا ہے

۱۹۵۔ سطح پر جاذبہ کا حاصل عمل قوتوں (ا۔ سہ) (ب۔ سہ) (ب۔ سہ) اور جی کا حاصل ہے اور اس لئے اس عمود کے بالعکس متناسب ہے جو مرکز سے ماسی مستوی پر کھینچا جائے۔

نیز اندرونی ذرہ پر مانع کی کششوں (لاکب) اور جی کو ذہن میں رکھ کر اور لیب نیز کے مسئلہ سے استفادہ کر کے یہ آسانی ثابت ہو جاتا ہے کہ کسی مرکزی ستوی تراش پر کا حاصل ذور اس مستوی کے عمود وار اور اس کے رقبہ کے متناسب ہے۔

۱۹۶۔ مشر اوہنٹرنے اس طرف توجہ دلائی ہے اور حسب ذیل طریقہ پر اس کی تشریح کی ہے کہ گھومنے والے ناقص نما کا اصفافی توازن برقرار نہیں رہ سکتا جبکہ گردش کا محور صدری محور پر منطبق نہ ہو۔

صدری محور کے لحاظ سے فرض کر دو کہ گردش کے محور کی سمتی جو ب النام ل، م، ن میں کیت کا کوئی نقطہ (لا، ما، ی) ہے اور ل اس عمود کا پایہ ہے جو ہر سے محور پر کھینچا گیا ہے۔

تب $ول = ل + م + ن$ اور اگر $ول = ۰$ تول کے محدد ہیں ل، م، ن، اسرار سہ مرل کو محوروں کے متوازی تحلیل کیا جائے تو اجزائے تحلیل حاصل ہوتے ہیں

سہ (لا۔ ل۔ ۰) سہ (۰۔ ل۔ ۰) سہ (۰۔ م۔ ۰) سہ (۰۔ ی۔ ۰) اس لئے آزاد سطح کی تفرقی مساوات ہے

{ سہ (لا۔ ل۔ ۰) - { لا۔ فرلا + { سہ (۰۔ ل۔ ۰) - { ب۔ ا + { فرلا + { سہ (۰۔ ی۔ ۰) - { ج۔ ی + { فرلا -

پس آزاد سطح کی شکل مساوات

سہ (لا + ما + ی) - سہ (لا + م + ن) - { لا۔ ب۔ ا - ج۔ ی = مستقل سے

حاصل ہوتی ہے اور یہ مساوات صدری محوروں کے لحاظ سے ایک ناقص نما کو

میں تحلیل ہو جاتا ہے۔
حل لہ = کہ جس سے چپنا کرنا حاصل ہوتا ہے مستور کر کے اقسام کو
داہنی طرف منتقل کرنے سے

$$\frac{۲(۱-۱۶)(۱-۱۶)۲۶}{۳۵} = \dots \dots \dots (۳)$$

اس مساوات سے لہ کی تین ہوتی ہے جبکہ لہ معلوم ہو۔
لہ کو مثبت قیمت دینے سے مساوات کی داہنی طرف کا جملہ مثبت
ہوگا اگر لہ = اور منفی اگر لہ = ۰۰ ، پس لہ کی ایک قیمت مثبت ہوگی جو
مساوات کو پورا کرے گی۔

مزید براں مساواتوں (۲) کی رو سے

$$۱ - \frac{ج}{۱+۱} = ۰$$

$$= \frac{۳(۱-۱۶)۲۶}{۳(۱+۱)(۱+۱)۲۶} \dots \dots (۴)$$

اور اسلئے سہ ایک مثبت مقدار ہے۔

پس اس کی پوری طرح تحقیق ہوگئی کہ تین غیر مساوی محوروں والا ناقص نما
آزاد سطح کی ممکن شکل ہے جس کے تینوں محور غیر مساوی ہیں اور سب سے چھوٹا
محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔

مساوات (۳) سے یہ ظاہر ہے کہ لہ لازماً < ۱ اور نہ متکمل بحکل

کی پوری وسعت میں مثبت ہوگا اور اس لئے معدوم نہ ہو سکے گا۔ اس لئے

$$۱ < لہ یا لہ لازماً < ۱$$

اور اس لئے و/ج یا ب/ج کما سے بڑا ہونا چاہیے۔ اس لئے

جیکو بی ناقص نما کی دونوں پچتیں چھوٹی نہیں ہو سکتیں۔

$$ا = \frac{ک^۲ ج}{ک^۲ ج + ۱} \frac{ع^۲ فرع}{ه}$$

$$ب = \frac{ک^۲ ج}{ک^۲ ج + ۱} \frac{ع^۲ فرع}{ه}$$

$$ج = \frac{ک^۲ ج}{ک^۲ ج + ۱} \frac{ع^۲ فرع}{ه}$$

جن میں طء جملہ

$$\sqrt{(۱ + ک^۲ ل^۲)(۱ + ک^۲ ل^۲)}$$

کو تعبیر کرتا ہے۔

آزاد سطح کی تفرقی مساوات ہے

$$(ا - لا) سہ^۲ لا + (ب - ما) سہ^۲ ما + ج ی فری = ۰$$

اور اسلئے اگر آزاد سطح ناقص نما (۱) ہو تو

$$(ا - لا) سہ^۲ لا + (ب - ما) سہ^۲ ما + ج ی فری = ۰ \dots (۲)$$

سہ^۲ کو ساقط کرنے سے

$$(ا + لا)(۱ + ک^۲ ل^۲) = (ب - ما) سہ^۲ ما + ج ی فری$$

اور 'ا'، 'ب'، 'ج' کی قیمتیں اس میں مندرج کرنے سے یہ

$$(ا + لا)(۱ + ک^۲ ل^۲) = (ب - ما) سہ^۲ ما + ج ی فری$$

Mécanique Céleste, Tome, II. ;

Cours de Mécanique

Statics, Vol. II, p. 306.

نوٹ متعلقہ صفحہ (۳۱۷) دیکھو

(Duhamel)

(Minchin)

ڈوہل

مینچن

لہ کے ساتھ صفر اور لاگتا ہی ہوتا ہے۔ اس لئے اس کو ایک ایسی قیمت اختیار کرنی چاہیئے جو صفر اور ∞ کے درمیان لہ کی کسی خاص قیمت کے لئے بائیں طرف کے مثبت مستقل کے مساوی ہو۔ مزید برآں یہ بتایا جاسکتا ہے کہ اس مساوات کی صرف ایک اصل مثبت ہے کیونکہ یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ داہنی طرف کے جملہ کا مشتق ہمیشہ مثبت ہے۔ اس لئے h اور k کو دی ہوئی مقدار میں سمجھ کر ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایک اور صرف ایک کرہ نما شکل ہوگی جس کی طرف ابتر اور کرنے والا سیال مسلسل بائل ہوتا جائیگا

Mecanique Celeste, Tome, II

یہ بحث لاپلاس کی کتاب

Système du Monde, Tome II

کے صفحہ ۶۱ میں پانسی کولان کی

Mecanique Celeste Tome, II

کے صفحہ ۴۰۹ میں اور ٹسٹانڈ کی

کے صفحہ ۹۶ میں مل سکیگی۔

۱۹۴ — جیکوبی کا ناقص نمسا۔ جیکوبی نے یہ دریافت کیا کہ تین غیر مساوی محوروں والا ناقص نما گھومنے والے مائع کی کیت کے لئے اضافی توازن کی ممکن شکل ہے۔

جیکوبی کے مسئلہ کا حسب ذیل ثبوت (Liouville) کے ایک مضمون

Journal de l'Ecole Polytechnique,

سے لیا گیا ہے جو

Tom, XIV میں شائع ہوا۔

گردش کے محور کو محوری لیسکر فرض کرو (اگر ممکن ہو) کہ مائع کی سطح اس شکل کی ہے جو مساوات

$$z = y^2 + \frac{a^2}{r^2 + 1} + \frac{b^2}{r^2 + 1} \dots (1)$$

سے حاصل ہوتی ہے۔ مرکز کے نقطہ (لا، یا، ی) پر کے خدو پر
(۲-۷) تب اگر مائع کی کیت k ہو تو سطح کے نقطہ (لا، یا، ی) پر کے خدو پر
کی حاصل کششیں علی الترتیب (لا، ب، یا، اور ج) ہیں۔ جہاں

(۲۰۰)

سمت کے ساتھ ملکر نقطہ ن پر اس کرہ نما کے عمود وار ہے جو نقطہ ن میں سے گزرتا ہے اور سطح ا ب ج کے ہم مرکز اور متشابه ہے۔

دوسرے الفاظ میں سطح پر کے ایک ذرہ کا وزن اس مساوی دباؤ کی سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے اور کسی اندرونی ذرہ کی صورت میں اس مساوی دباؤ کی سطح کے عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے جو ذرہ میں سے گزرتی ہے۔

اسی طرح اگر آزاد سطح ا ب ج کی شکل ممکن اشکال میں سے ایک ہو تو ہم یہ قیاس کر سکتے ہیں کہ مانع کا ایک ہم مرکز خول کیت کے ساتھ جوڑ دیا گیا ہے جس کی بیرونی سطح اسی شکل کی ہے جیسے ا ب ج یا دوسری ممکن شکل کی سطح ہے۔

پہلی صورت میں ا ب ج مساوی دباؤ کی سطح بھی ہوگی لیکن دوسری صورت میں ا ب ج مساوی دباؤ کی سطح نہیں ہوگی۔ کیونکہ مساوی دباؤ کی نئی سطحیں بیرونی سطح کے متشابه اور متشابه واقع ہوں گی۔

۱۹۴۷ — اگر سیال کی کچھ کیت اپنے مرکز نقل میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد ایک ایسی زاویہ رفتار سے گھمادی جائے کہ $\frac{2\pi}{\omega} = 11$ ڈی گری کی تیز رفتاری سے (۱۸۸) میں حاصل شدہ حد سے تجاوز کر جائے تو اس سے یہ مستنبط نہیں ہوتا کہ سیال کرہ نما کی شکل میں متوازن نہیں ہو سکتا کیونکہ یہ قیاس کیا جاسکتا ہے کہ کیت اطراف میں بلحاظ محور کے پھیل جائیگی اور زیادہ چھٹی صورت اختیار کرے گی حتیٰ کہ اس کی زاویہ رفتار اس قدر گھٹ جائے کہ کرہ نما شکل کا امکان ہو جائے۔

اگر کیت سیال کامل پر مشتمل ہو تو اس کی شکل توازن کے کرہ نما شکل میں سے بہتر اندازہ کر سکتی ہیں لیکن اگر جیسا کہ نام معلومہ سیالوں کی صورت میں ہوتا ہے، ذرات کے انسانی ہٹاؤ سے رگڑ پیدا ہو تو بہتر اندازہ بتدریج گھٹتے جائیں گے اور بالآخر توازن کا ایک محل رونما ہوگا۔ اب یہ اصول استعمال کر کے کوکل نظام کا زاویہ فی معیار حرکت بلحاظ محور کے مستقل رہیگا ہم انتہائی زاویہ رفتار اور اختیار کردہ انتہائی شکل معلوم کر سکتے ہیں۔

عام سوال پر بحث کرنے کے لئے فرض کرو کہ سیال کی کیت کو کسی طرح حرکت دیکھی گئی ہے اور پھر اسکو اپنی حالت پر چھوڑ دیا گیا ہے تو کیت کا مرکز یا توازن ہو گا یا یکساں

گھوم رہا ہے۔

فرض کرو کہ Δ بج آزاد سطح اور Δ ع ف مساوی دباؤ کی کوئی سطح ہے تب پہلی صورت میں Δ ع ف کے کسی نقطہ پر کی حاصل قوت اس نقطہ پر سطح کے عمود وار ہے اور Δ بج اور Δ ع ف کے درمیانی سیال کے وجود سے غیر متاثر رہتی ہے۔ اس لئے اگر اس سیال کو نکال دیا جائے تو اس سیال کے توازن پر کسی قسم کا اثر نہیں پڑیگا جو Δ ع ف سے محض دو ہے۔ دوسری صورت میں Δ ع ف کے کسی نقطہ پر کی قوت اگرچہ کہ اس نقطہ پر سطح کے عمود وار ہے لیکن Δ ع ف کے اندرونی سیال کی کمیت کی اور Δ ع ف اور Δ بج کے درمیانی سیال کی کمیت کی کششوں کا حاصل ہے، حاصل قوت کے ان دو اجزاء ترکیبی کا سطح کے عمود وار ہونا ضروری نہیں اور عام طور پر Δ ع ف کے بیرونی سیال کو بقیہ سیال کے توازن پر اثر ڈالے بغیر علیحدہ نہیں کیا جاسکتا۔

لیکن اگر سیال متجانس ہو اور ذرات کلیہ نیوٹن کے بوجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہوں اس طرح کہ آزاد سطح کرہ نما ہو تو مساوی دباؤ کی سطحیں متشابه کرہ نما ہوں گی اور ایسی صورت میں چونکہ دو ہم مرکز متشابه اور متشابه واقع ناقص نماؤں سے طے ہوئے ناقص نمائی خول کی حاصل کشش اس کے اندرونی نقطہ پر صفر ہوتی ہے اس لئے Δ بج اور Δ ع ف کے درمیانی سیال کو علیحدہ کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ گردش کی رفتار غیر متغیر رہے۔

مزید براں ہم نے دفعہ (۱۸۸) میں یہ دیکھا ہے کہ لمحہ کی کسی دی ہوئی قیمت کے لئے جو ایک معینہ حد سے تجاوز نہیں کرتی دو کرہ نما اشکال ممکن ہیں۔ فرض کرو کہ آزاد سطح Δ بج ان میں سے ایک شکل اختیار کرتی ہے۔ سیالی کمیت کے اندر ایک ہم مرکز کرہ ناک ہک ٹھینچو جو دوسرے کرہ نما کے متشابه ہو۔ تب Δ بج اور گ ہک کے درمیانی سیال کو سیالی کمیت گ ہک پر کسی قسم کا اثر ڈالے بغیر علیحدہ کیا جاسکتا ہے۔

سطح گ ہک کے نقطہ نیر کے ذرہ پر خول کا عمل نقطہ نیر پر سطح کے عمود وار نہیں ہے لیکن یہ عمل کمیت گ ہک کی کشش اور مغرضہ قوت

کے محوروں میں نسبت ۳۰۰ : ۲۹۹ ہے۔

اب یہ واقعہ کہ متجانس سیال کے ایک کرہ نما کے محور جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی اور جس کی گردش کا وقت زمین کی گردش کے وقت کے مساوی ہو ۲۳۲ : ۲۳۲ کی نسبت رکھتے ہیں یہ بتا آئے کہ یہ بالکل خارج از امکان ہے کہ زمین اپنے دور حیات میں کسی وقت ایک متجانس سیال کی کثافت تھی۔
۱۹۱ — لمبو ترا کرہ نما ممکن شکل نہیں۔ یہ معلوم رہے کہ ہم نے اضافی توازن کی حالت میں گھومنے والے سیال کی شکل کے عام مسئلہ کو حل نہیں کیا ہے بلکہ

صرف یہ دکھا یا ہے کہ اگر $\frac{2}{3} \pi$ ث > ۲۲۴ تو چپے کرہ نما ممکن شکل ہے۔ اور ہم دیکھتے ہیں کہ یہ نتیجہ سیال کی مقدار کثیف پر منحصر نہیں بلکہ صرف

کثافت اور زاویہ رفتار پر منحصر ہے۔ اگر $\frac{2}{3} \pi$ ث < ۲۲۴ تو اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ توازن ناممکن ہے بلکہ صرف یہ کہ اس صورت میں چپے کرہ نما کی شکل ممکن نہیں ہے۔
اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ آیا لمبو ترا کرہ نما ممکن شکل ہے یا نہیں ہم دفعہ (۱۸۸)

میں لکھی بجائے۔ کہ لکھتے ہیں جہاں کہ ہونا چاہیے > اتب اس دفعہ کی (ع) اور (ج) مساواتوں سے

$$\frac{\pi^2}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(n^2 + 1)(n^2 + 4)}$$

جو ناممکن ہے کیونکہ مساوات کے طرفین مختلف العیاست ہیں۔ پس لمبو ترا کرہ نما توازن کی ممکن شکل نہیں ہو سکتا۔

۱۹۲ — پائسن ۲ (Tome II p. 547) یہ بتایا ہے کہ بیرونی قوتوں کے زیر عمل ساکن

سیال کی مساوی دباؤ کی سطحوں اور ایسے سیال کی مساوی دباؤ کی سطحوں کے درمیان ضروری فرق ہوتا ہے جو اپنے ذرات کی ایک دوسرے کو جذب کرنے والی قوتوں کے زیر عمل ساکن رہے یا ان کے زیر عمل ثابت محور کے گرد یکساں رفتار سے

مس۔ گ۔ مس نظام کی اکائیوں میں ج = ۹۸۰ تقریباً اور ۲۲ = ۴ × ۹۰ سنٹی میٹر۔
اس لئے بیینی اکائیوں میں

$$\text{ث} = ۳ / \text{ج} = ۲۲ / ۹۸۰ = ۰.۰۲۲۴۵$$

اگر ہم گرہ نمائی شکل کے لئے مس / ۲ ث کو اس کی انتہائی قیمت ۲۲۴ کے مساوی لیں اور ث کی مذکورہ بالا قیمت کو استعمال کریں تو محوری گردش کا وقت ۲۲ / مس = ۲ گھنٹے ۲۵ منٹ حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے یہ قلیل ترین وقت ہے جس میں کچھ متجانس کیت جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے یکساں رفتار سے ایک چپٹے گرہ نما کی شکل میں گھوم سکتی ہے۔

پھر اگر ہم مس کی بجائے زمین کی زاویائی رفتار $\frac{۲۲}{۲۹۰ \times ۲۲}$ استعمال کریں تو

$$\text{ث} = \frac{۹۰ \times ۲۲}{۳۶۵ \times ۲۹۰ \times ۲۲} = ۰.۰۲۳ \text{ تقریباً}$$

(۲۰۳)

جو انتہائی قیمت ۲۲۴ سے کم ہے اس کثافت اور اس زاویائی رفتار کے لئے دو گرہ نمائی اشکال ممکن ہیں کیونکہ ان کی دو حقیقی قیمتیں ملتی ہیں جیسا کہ دفعہ (۱۸۸) میں واضح کر دیا گیا ہے۔ بڑی قیمت ایک بہت چپٹے گرہ نما کے متناظر ہے اور چھوٹی قیمت سے ایک ایسا گرہ نما حاصل ہوتا ہے جس کی پللیجیت دفعہ (۱۸۹) کی رو سے ہے

$$\frac{۱}{۲۳۲} = \frac{۱۵}{۸} \times ۰.۰۲۳ = ۰.۰۴۳ \text{ یا تقریباً}$$

علم مساحت الارض سے ہم جانتے ہیں کہ زمین اپنی شکل میں ایک گرہ سے بہت ہی کم فرق رکھتی ہے کیونکہ اس کی پللیجیت $\frac{۱}{۲۹۹.۱۵}$ ہے یعنی گرہ نما

۱۔ دیکھو انسائیکلو پیڈیا بری ٹانیکا میں (A. R. Clarke) اور (F. R. Helmert) کا مضمون (Figure of the Earth)۔

اور چونکہ $\frac{2}{3} \pi$ اس لئے $\frac{1}{2} \pi$ سے زیادہ ہے لیکن نیم محوروں میں نسبت $\frac{1}{2} \pi$ ہے اس لئے کہ بڑی قیمت ہمیشہ بہت زیادہ چھپے کرہ نما کو تعبیر کرتی ہے اور $\frac{2}{3} \pi$ کے متناظر ہے۔
 ہو جاتا ہے جو اصل $\frac{1}{2} \pi$ کے متناظر ہے۔
 نیز $\frac{2}{3} \pi$ کے متناظر کی چھوٹی قیمتوں کے لئے اصل $\frac{1}{2} \pi$ چھوٹی ہوگی اور اگر وہ کرہ نما کی پیلوجیت کو تعبیر کرے تو

$\frac{1}{2} \pi = (1 + \frac{1}{2} \pi) \frac{1}{2} \pi$ اس طرح $\frac{1}{2} \pi = \frac{1}{2} \pi$ تقریباً اور اس لئے مساوات (ج) سے

$$\frac{2}{3} \pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} \pi)^n} \frac{1}{(1 + \frac{1}{2} \pi)^n} = \frac{1}{15}$$

صہ کی پہلی قوت تک - ۱
 صہ = $\frac{1}{2} \pi$ تقریباً
 میکان پر مبنی شخص تھا جس نے یہ ثابت کیا کہ متجانس سیال کی کثافت جبکہ وہ گھوم رہی ہو تو توازن کی ممکن شکل چٹا کرہ نما ہوتی ہے اور اس لئے ان کرہ نماؤں کو عام طور پر میکان کے کرہ نما کہتے ہیں۔
 ۱۹۰۔ ایسے سیال کی صورت میں اس مسئلہ کا استعمال جس کی کثافت زمین کی اوسط کثافت کے مساوی ہے۔

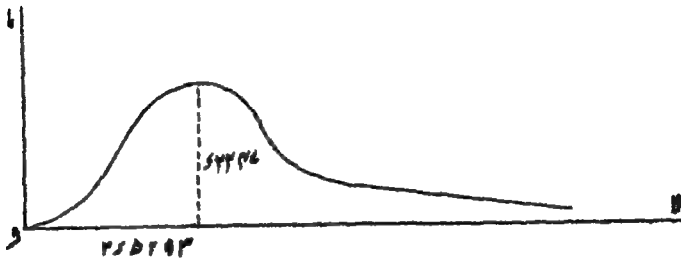
اگر ہم فی الحال زمین کو نصف قطر کا ایک کرہ مابین اور اس کی اوسط کثافت کو $\frac{1}{2} \pi$ سے تعبیر کریں تو اس کی سطح پر کی کشش $\frac{1}{2} \pi$ کے لئے سے تعبیر ہوگی۔
 اس سے قطب پر جاذبہ ارض کی قوت (ج) کی بھی پیمائش ہو جاتی ہے۔

لے ڈارون کی کتاب Scientific Papers جلد سوم کے صفحہ ۲۲۳ میں $\frac{2}{3} \pi$ کا
 کی قیمت پیلوجیت کی عیسوی قوت تک مائل کی گئی ہے۔

لئے معدوم ہوتا ہے جو ۳۲ سے بڑی ہے۔ جدولوں کی مدد سے ہم باسانی دیکھ سکتے ہیں کہ (۲) مثبت ہے اور (۳) منفی، اس لئے مطلوبہ قیمت ۲ اور ۳ کے درمیان واقع ہے۔ نیز $(۲۵) = ۵۰۰۲۵$ تقریباً اور

$$\text{نیوٹن کے طریقہ تقریب سے } ۲۵ - \frac{f(۲۵)}{f'(۲۵)} = ۵۰۲۹۳ + ۲۵$$

$$= ۲۵۵۲۹۳ \dots$$



پس $\frac{f(x)}{f'(x)}$ صرف اس وقت معدوم ہوتا ہے جبکہ $۲۵۵۲۹۳ \dots =$

اور اس وقت λ اعظم ہے اور اس کی قیمت ۲۲۴۶ ہے۔

اس کے مساوات (ب) کی ترسیم اس شکل کی ہوگی جو تصویر میں دکھائی گئی ہے لیکن اس میں معین کا پیمانہ فصلہ کے پیمانہ سے بڑا لیا گیا ہے۔

پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ اگر $\frac{۲}{۲} \text{ فٹ} < ۲۲۴۶$ تو چپٹا کرہ نما توازن کی ممکن شکل نہیں ہو سکتا۔ لیکن اگر $\frac{۲}{۲} \text{ فٹ} > ۲۲۴۶$ تو دوکرہ نمائی اشکال ممکن ہیں کیونکہ ۲۲۴۶ سے کم، معین کی بر قیمت کے جواب میں فصلہ کی دو حقیقی قیمتیں λ ، λ حاصل ہوتی ہیں۔

۸۹ — کرہ نمائی اشکال کی ہیلیجیٹ — جب λ کی دو حقیقی قیمتیں λ ، λ (۲۰۲)

ہوں تو ایک ۲۵۵۲۹۳ سے بڑی اور دوسری اس سے کم ہوگی۔ فرض کرو کہ $\lambda < \lambda$ تو جیسے $\frac{۲}{۲} \text{ فٹ}$ گھٹتا ہے λ گھٹتا ہے اور λ بڑھتا ہے (دیکھو شکل)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+n^2)(3+n^2)} = 1 \quad \text{..... (جہ)}$$

$$\text{نیز } \frac{1}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{(3+n^2)^2} = \frac{1}{(1+n^2)(3+n^2)} \quad \text{..... (گم)}$$

$$\frac{1}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{(3+n^2)^2} = \frac{1}{(1+n^2)(3+n^2)} \quad \text{..... (گم)}$$

$$\frac{1}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{(3+n^2)^2} = \frac{1}{(1+n^2)(3+n^2)} \quad \text{..... (گم)}$$

جہاں

(۲۰۱)

$$\frac{1}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{(3+n^2)^2} = \frac{1}{(1+n^2)(3+n^2)} \quad \text{..... (گم)}$$

اشکال (جہ) اور (ب) سے ظاہر ہے کہ بالترتیب $n=0$ اور $n=\infty$ کے لئے
محدوم ہو جاتا ہے۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ جیسے n صفر سے بڑھتا ہے تو n ایک
اور صرف ایک قیمت اختیار کرتا ہے۔

نیز $\frac{1}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{(3+n^2)^2}$ کی علامت صفر (۱) کی علامت پر منحصر ہے،

$$\begin{aligned} \text{نیز جب } n &= 0 \quad \text{تو } \frac{1}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{(3+n^2)^2} = \frac{1}{(1+0)^2} - \frac{1}{(3+0)^2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \\ \text{اور جب } n &= \infty \quad \text{تو } \frac{1}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{(3+n^2)^2} = 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$

نیز ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{1}{(1+n^2)^2} - \frac{1}{(3+n^2)^2} = \frac{1}{(1+n^2)(3+n^2)} \quad \text{..... (گم)}$$

اور یہ $n=0$ سے $n=\infty$ تک مثبت ہے اور اس سے بڑھی لاکی تمام قیمتوں
کے لئے مثبت، پس n (۱) مثبت ہونے سے ابتدا کرتا ہے اور اس وقت
تک بڑھتا ہے جب تک n ∞ تک بڑھ جاتا ہے لیکن لاکی اس سے بڑھی قیمتوں کیلئے
 n (۱) مسلسل گھٹتا ہے۔ اس لئے n (۱) لاکی ایک ایسی قیمت کے

توازن کی مساوات ہے

$$\text{فرد} = \text{ث} \{ (\text{س}^2 \text{لا} - \text{لا}) \text{فرلا} + (\text{س}^2 \text{ا} - \text{ما}) \text{فرما} - \text{سے فری} \}$$

لیکن کردہ نما کی مساوات سے

$$\text{لا فرلا} + \text{ما فرما} + (\text{ا} + \text{لا}) \text{ی فری} = -$$

اور چونکہ اسکو مساوی دباؤ کی سطح ہونا چاہیے اس لئے

$$\text{س}^2 - \text{لا} / \text{لا} = \text{س}^2 - \text{ما} / \text{ما} = - \text{سے} / (\text{ا} + \text{لا}) \text{ی}$$

پس میں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{س}^2}{\text{لا} \text{ث}} = \frac{(\text{ا} + \text{لا}) \text{س}^2 \text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}} - \frac{(\text{ا} - \text{س}^2 \text{ا})}{\text{لا}}$$

$$\frac{\text{س}^2}{\text{لا} \text{ث}} = \frac{(\text{ا} + \text{لا}) \text{س}^2 \text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}} - \frac{(\text{ا} - \text{س}^2 \text{ا})}{\text{لا}} \dots \dots \dots (\text{عہ})$$

اگر سہ اور ث دئے جائیں تو اس مساوات سے لہ متعین ہو جاتا ہے اور پھر کردہ نما کے نیم محوروں کی باہمی نسبت معلوم ہو جاتی ہے۔

اصلی حل دریافت کرنے کے لئے فرض کرو کہ

$$\text{ا} = \frac{(\text{ا} + \text{لا}) \text{س}^2 \text{ا} - \text{لا}}{\text{لا}} \dots \dots \dots (\text{بہ})$$

سہ الا کی بجائے اس کے سلسلے کو مندرجہ کرنے سے جسے ہم جانتے ہیں کہ سہ الا

ہے جبکہ لا > ا حاصل ہوتا ہے

بقیہ نوٹ صفحہ (۳۰۷) کے استعمال سے غیر منطقی مقادیر شامل نہیں ہوتیں۔ ماضی اشکال کیلون اور شیٹ (Natural Philosophy) کے دفعہ ۵۲۷ میں اور راولپنڈی کی تخلیقی سکونیات حصہ دوم صفحہ ۲۱۹ میں مندرج ہیں۔

اس دفعہ کے نتائج غیر متجانس سیال پر بھی صادق آتے ہیں خواہ متواتر طبقات میں کثافت کے تغیر کا قانون کچھ ہی ہو۔
۱۸۸ — متجانس مائع کی کچھ کثیت جس کے ذرات کلیہ نمونہ کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں اعتدالی توازن کی حالت میں لہنی کثیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہی ہے۔ سطح کی ممکن شکل معلوم کرنا مطلوب ہے۔

اس مسئلہ کا ٹھیک حل دریافت کرنا ممکن نہیں جس کی وجہ اور پرستادہ گئی ہے لیکن یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ پیٹا (Oblate) کرہ متوازن کی ممکن شکل ہے۔ فرض کرو کہ کرہ نما کی مسادات ہے

$$1 = \frac{y^2}{c^2} + \frac{z^2}{c^2(1 + \frac{a^2}{b^2})}$$

جہاں گردش کا محور محوری ہے۔
تب نقطہ (۱، ۱، ۱) پر کے ذرہ پر مباد کی سمت میں محاور کے متوازی حاصل کششیں بالترتیب

$$Y = \frac{2\pi\sigma}{r^3} \{ (1 + \frac{a^2}{b^2}) \sin \alpha - \cos \alpha \}$$

$$M = \frac{2\pi\sigma}{r^3} \{ (1 + \frac{a^2}{b^2}) \sin \alpha - \cos \alpha \}$$

$$Z = \frac{2\pi\sigma}{r^3} \{ \sin \alpha - \cos \alpha \} (1 + \frac{a^2}{b^2})$$

سے تعبیر ہوگی۔

۱۵ — لاپلاس کی (Mecanique Celeste) پائسن کی (Mecanique) ڈیویل کی (mecanique) اور ڈیویل کی سکونیات میں یہ جملے لیتے۔ مورخاؤں کے کتاب میں کرہ نما کی مسادات (۱ + ۱/۲) + ۱/۲ (۱ - ۱/۲) = ۱ لگتی ہے لیکن ۱ - ۱/۲ = ۱/۲ (۱ + ۱/۲) دیکھنے سے مذکورہ بالا جملے حاصل ہو جاتے ہیں۔

جو ذرہ اور کیت کے مرکز کے درمیان ہے ، اور اگر سیال کی کل کیت کا ناپ
 وہ ہو تو نقطہ لا ، ا ، ی پر کے سیالی ذرہ پر حاصل کشش کے اجزائے ترکیبی
 محوروں کے متوازی ، مہ لا ، مہ ما ، مہ ی سے تعبیر ہو سکتے ہیں۔
 مہ لا کو مرکز ثقل پر لینے سے اور گردش کے محور کو محور ی قرار دینے سے
 توازن کی مساوات ہے

$$\text{فرد} = \{ (سہ لا - مہ لا) + (سہ ما - مہ ما) + (سہ ی - مہ ی) \}$$

اور اس لئے

$$0 = \{ (سہ لا - مہ لا) + (سہ ما - مہ ما) + (سہ ی - مہ ی) \}$$

آزاد سطح پر دھنریا مستقل ہے اور آزاد سطح کی مساوات ہے

$$(ا - سہ لا) + (سہ ما - مہ ما) + (سہ ی - مہ ی) = 0$$

مستقل سیال کی کیت پر اور سہ پر منحصر ہوگا۔

سہ جب بہت چھوٹا ہوتا ہے تو آزاد سطح تقریباً کر دی ہوتی ہے اور جیسے
 سہ ، صفر سے مد تک بڑھتا ہے تو کر دی سطح قطبین پر زیادہ تر چھپی ہوتی جاتی ہے۔
 جب سہ = مہ تو آزاد سطح دو مستویوں پر مشتمل ہوتی ہے اس کو ممکن بنانے
 کے لئے ہم یہ تصور کر سکتے ہیں کہ سیال ایک اسطوانی سطح کے اندر گھرا ہوا ہے جس کا محور
 گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔

جب سہ کے مہ تو آزاد سطح دائرہ دار چادری ہوتی ہے جو سہ کی ایک
 خاص قیمت (سہ) کے لئے مخروط بن جاتی ہے اور سیال اس فضا کو پر کرتا ہے جو
 مخروط اور اسطوانے کے درمیان ہے۔ سیال کے حجم کو محسوب کر کے $ل = 0$ رکھنے
 سے سہ کی یقین ہو سکتی ہے کیونکہ اس صورت میں مہ لا پر دباؤ معدوم ہو جاتا ہے۔
 اگر سہ < سہ تو آزاد سطح دائرہ دار چادری ہوتی ہے جو جیسے سہ بڑھتا ہے
 اسطوانہ کی شکل کے قریب آتی ہے اور اس لئے سہ کی بڑھی قیمتوں کے لئے یہ
 قیاس کرنا ضروری ہے کہ اسطوانہ جس کے اندر سیال ہے اپنے سروں پر بند ہے۔

باب یازدہم

(۱۹۸)

گھومنے والے مانع کا توازن جس کے ذرات ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں

۱۸۶۔ اگر مانع کی کچھ کمیت جس کے ذرات ایک معین قانون کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں یکساں رفتار سے ایک ثابت محور کے گرد گھومنے تو آزاد سطح کی کسی خاص شکل کے لئے یہ قرین قیاس ہے کہ مانع کے ذرات اضافی توازن کی حالت اختیار کر سکتے ہیں۔ بہر کمیت چونکہ کسی ذرہ پر کل کمیت کی حاصل کشش عام طور پر اس کی شکل پر منحصر ہوگی جو غیر معلوم ہے اس لئے اس مسئلہ کا مکمل حل حاصل نہیں کیا جاسکتا۔

کشمش کے کسی اختیاری طور پر مقرر کردہ قانون کی صورت میں یہ مسئلہ محض نظری دلچسپی کا باعث ہو سکتا ہے۔ لیکن جب یہ قانون تجاذب کا قانون ہو تو اس کی اہمیت بڑھ جاتی ہے کیونکہ طبیعی ہیئت کے ایک مسئلہ سے اس کا تعلق ہے۔

ہم سیال کو متجانس خیال کرینگے اور اپنی توجہ صرف دو صورتوں تک محدود رکھیں گے۔ پہلی صورت میں تجاذبی قوتوں کا فاصلے کے متناسب ہونا اور دوسری صورت میں نیوٹن کے کلیہ کی پابندی کرنا فرض کر لیا جاتا ہے۔

۱۸۷۔ متجانس مانع کی کچھ کمیت اپنی کمیت کے مرکز میں سے گزرنوالے ایک محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہی ہے۔ اس کے ذرات ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتے ہیں جو ایسے بدلتی ہے جیسے فاصلہ آزاد سطح کی شکل متعین کرنا مطلوب ہے۔

کسی ذرہ پر کی حاصل کشش اس فاصلے کی سمت میں اور اس کے متناسب ہے

ہے جہاں
 $f = ۲$ (طن ائمہ - م) (فرع ح = ۲۲) (طن اء - م) (طن اء فرع

اور $m = \Delta \left(\frac{H}{P} \right) = \text{حم مم (نہ + خط مم) لہ}$
 جب تختیاں ایک دوسرے سے بہت نزدیک ہوں تو ثابت کرو کہ دباؤ پہلے قریب تک
 $\frac{H}{f} = \frac{H}{2}$
 ف ۲

ہے۔

۴۱۔ سیال کا ایک قطر جو کسی قوتوں کے زیر عمل نہیں سوائے یکساں بیرونی دباؤ
 اور سطحی تناؤ کے ایک استوار جسم کی طرح ایک محور کے گرد گھوم رہا ہے۔ ثابت کرو کہ
 سطح پر $\frac{H}{P} = \frac{1}{2}$ مستقل ہے جہاں H سطح کے صدری قطر اٹھا ہے۔
 ۴۲۔ جب H محوری نیچے وار انتصانی ہو اور مبداء مناسب منتخب کیا گیا ہو تو ثابت
 کرو کہ H ، m ، k کثافتوں کے دو سیالوں کی سطح فاصلہ میں رابطہ

$$H = \frac{1}{2} (H' + H'')$$

کو پورا کرتی ہے۔ جہاں اٹھا کے صدری نصف قطر H ، H' ، H'' ہیں جن کو مثبت قرار دیا گیا
 ہے جبکہ تقریبی وار ہو، $H = \frac{1}{2} (H' + H'')$ (م - م) اور درمیانی رخ کا شعاری
 مستقل ہے۔
 اگر سطح محوری کے گرد گردش سطح ہو تو ثابت کرو کہ محور کے نزدیک کے حصہ کی تقریبی
 مساوات (اسطوانی حدود میں)

$$H = \frac{1}{2} (H' + H'') + \frac{1}{4} (H' - H'')^2$$

کی شکل کی ہوگی اور بتاؤ کہ جب نلی میں اٹھ ہو تو ایسی صورت میں H زاویہ تماس
 کی رقم میں کس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

۳۸۔ پانی کا ایک قطرہ شیشے کی ایک افقی تختی کی بجلی سطح سے ٹپک رہا ہے اگر سطحی تناؤ کو پانی کے ذریعہ وزن کے ساتھ نسبت مہرہ ہو اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ مہرہ (فرزہ/فرس)}$ جہاں قطرہ کے نصف الہناری منحنی کی قوس س ہے اور ذرہ زاد یہ ہے جو نصف الہناری منحنی کا اس افق سے بنانا ہے تو ثابت کرو کہ

$$(\text{جب ذ + ع}) (2 \text{ جب ذ + ع}) = 2 \text{ مہرہ (قطرہ + مس ذ + ع + ع)}$$

$$\left(\frac{2 \text{ قطرہ}}{\text{مس ذ}} + 2 \right) + \left(\frac{2 \text{ قطرہ}}{\text{مس ذ}} + 2 \right)$$

جہاں $\text{ع} = \text{فرزہ/فرزہ}$ ، $\text{ع} = \text{فرزہ/فرزہ}$ ، اگر مہرہ کا مربع نظر انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ نصف الہناری منحنی کے انحناء کا مربع ہے

$$\frac{\text{تولا فرلا}}{\text{لا (1 + لا) لا}}$$

جہاں $\text{لا} = \frac{1}{14} \text{ مہرہ}$ اور نقطہ انعطاف پر لا کی قیمت لا ہے۔

۳۹۔ زاد یہ اس ۲ مہرہ کا ایک طویل خانہ پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا قاعدہ افقی اور اس کا اوپر کا کنارہ پانی کی قدرتی ہوا سطح میں ہے۔ اگر سروں پر شعاری عمل نظر انداز کر دیا جائے تو ثابت کرو کہ

$$2 = 2 \text{ مہرہ (جب مہ + جم مہ)}$$

جہاں خانہ کا وزن فی اکائی طول و اس کے مساوی حجم کے پانی کا وزن و سطحی تناؤ مہرہ اور قوت شعری کے زاد یہ کا مکملہ مہرہ ہے۔

۴۰۔ ح حجم کے پارہ کا ایک قطرہ بغیر بیرونی قوتوں کے محل کے شیشے کی دو متوازی تختیوں کے درمیان دہایا گیا ہے۔ تختیوں کا درمیانی فاصلہ سطحی تناؤ مہرہ شیشے اور پارہ کے لئے زاد یہ تماس نہ ہے۔ ثابت کرو کہ مطلوبہ دہاؤ کی مقدار

$$2 \text{ مہرہ مہ/مہ (1 - مہ)}$$

سے حاصل ہوگا جہاں کثافت کو ث تغییر کرتا ہے اور یہ مان لیا گیا ہے کہ قطرہ کر دی ہے۔
 ۳۵ — در دائرہ چھلے جن کا مشترک محور ان کے مستویوں پر علی القوا تم ہے مانع کی
 ایک بند چلی کو تھامی ہوئی ہیں۔ چلی کی اندرونی ہوا بیرونی ہوا سے زیادہ دباؤ پر
 ہے۔ ثابت کرو کہ چلی کے سرے نصف قطر $\frac{r}{2}$ کے گڑے ہیں اور جھلیوں کی
 درمیانی سطح ایک گردشی سطح ہے جس کے نصف انہاری سطح کی ذاتی مساوات
 جب $F = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ ہے جہاں محور کے ساتھ عماد کا میلان ϕ ہے اور فاصلہ
 محور سے λ ہے۔

۳۶ — اگر مانع دو متوازی انتصابی تختیوں کے درمیان شعاری عمل سے اوپر کھینچا
 جائے تو ثابت کرو کہ ساکن سطح کے اوپر آزاد سطح کے کسی نقطہ پر چڑھاؤ F / ϕ / ϕ
 ہے جہاں ϕ ماس کا ارتفاع F اور آزاد سطح کی قوس ϕ ہے جو اس سے
 ناپی گئی ہے، سطحی تناؤ T ، ϕ ج T م کے مساوی ہے اور مقیاس $k =$
 $\frac{m}{m} / (F - m)$

۳۷ — نصف قطر کا ایک طویل مستدیر اسطوانہ مانع میں کلا غرق ہے مانع کے
 ساتھ اس کا حادہ نزادیہ تماس عم ہے۔ اس کے محور کو افق رکھ کر اس کو بند رجج
 مانع سے نکال لایا ہے ثابت کرو کہ مانع کی ابتدائی اور انتہائی ہوا سطح کے اوپر F
 ارتفاع تک جب اسطوانہ کا محور پہنچ جاتا ہے تو مانع کے ساتھ تماس ٹوٹ جاتا ہے جہاں
 ف مساواتوں

$$F = \text{رجم} (F - m) + m \text{ رجم } \frac{1}{2}$$

$$\frac{m}{2} \text{ جب } (F - m) + 2 \text{ جب } \frac{1}{2} - \text{مسز} \text{ جب } \frac{1}{2}$$

$$= 2 \text{ جب } \frac{1}{2} - \text{مسز} \text{ جب } \frac{1}{2}$$

سے حاصل ہوتا ہے اور سطحی تناؤ کو مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ $\frac{1}{2}$ ج m ہے

ایر پھلی حد ایک دز فی لچکدار تاگا ہے جو نصف قطر کے ایک افقی دائرہ کی شکل میں آزادانہ ٹٹک رہا ہے۔ تاگے کا قدرتی طول ۱۱۲' ۱۱' اس کے لچک کی قدر ۱۰' اس کا وزن ۱۱۲' ۱۱' و اور جہلی کا تناؤ ۱۱' ۱۱' ہے۔ ثابت کر دو کہ مساوات

$$(۱۰' - ۱۱' ۱۱') (۱۱' ۱۱' + ۱۰' ۱۱') = ۱۱' ۱۱'$$

کو پورا کرتا ہے۔

۳۳ — مانع کی ایک جہلی بیرونی طرف سے ایک ایسے بند استوار تار سے محدود ہے جس کے (تار کے) منحنی کا ایک ہی مستوی میں ہونا ضروری نہیں جہلی کی اندرونی حد ایک بند لائنم تاگا ہے۔ ثابت کر دو کہ کسی نقطہ پر تاگے کا نصف قطر انحنائستقل ہے اور یہ کہ مڑوڑ (Torsion) کا نصف قطر جہلی کے اس نقطہ پر کے کسی ایک صوری نصف قطر انحنائے عددًا مساوی ہے۔

۳۴ — تار کے ایک دائرہ کو (نصف قطر ۱) صابون آمیز پانی کی سطح میں رکھ کر آہستہ آہستہ اٹھایا گیا ہے تاکہ اس کے ساتھ ایک جہلی اٹھ آئے۔ اس کے وزن کو نظر انداز کر کے ثابت کر دو کہ جہلی کی نصف النہاری تراش ایک زنجیرہ ہے۔ جہلی پانی کی ہموار سطح کو جس زاویہ پر ملتی ہے اس کو معلوم کر دو۔ نیز ثابت کر دو کہ نصف النہاری منحنی کا مبدل جبکہ جہلی کا رقبہ ۱۱' ۱۱' کے مساوی ہو رہی ہے جہاں ی

$$۱۱' ۱۱' = ۱۱' ۱۱' (۱ - ۱۱' ۱۱')$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۳۵ — شعری نلی کا سر جب پانی میں ڈبو دیا جاتا ہے تو پانی ف ارتفاع تک اس میں چڑھ جاتا ہے۔ نلی کو پانی سے ہٹا لیا جاتا ہے اور نصف قطر کا ایک قطرہ اس کے سرے پر نمودار ہوتا ہے اگر نلی میں تھے ہوئے پانی کا طول قطرہ کی تہ سے نلی کے اندرونی آبی ستون کی جوئی تک ف ہو تو ثابت کر دو کہ سطحی تناؤ ۱۱' ۱۱'

$$۲ \text{ ت سرج ٹ} = (ف - ف) - ۱۱' ۱۱'$$

(۱۹۶)

کہہ ہوائی سے گھرا ہوا ہے۔ اس کے اندر ایک ہم مرکز جوئے ہے جو ہوا سے بھرا ہوا ہے جس کا حجم اس گروہ ہوائی کے برابر ہے $\frac{4}{3}\pi r^3$ ہوتا ہے۔ اسے کا سطحی تناؤ T ہے۔ ثابت کر دو کہ توازن کی صورت میں جوئے کا نصف قطر لامعاتات

$$\left\{ r_1 r_2 - \frac{r_1^2 r_2 + r_1 r_2^2}{r_1 + r_2} \right\} r_1 r_2 + \left\{ \frac{1}{r_1 + r_2} + \frac{1}{r_2} \right\} r = \left(1 - \frac{r_1}{r_2} \right) \pi$$

سے حاصل ہوگا۔

۲۹۔ اگر کثافت ث کے مانع کی کچھ کمیت قوتوں کے ایک بقائی نظام نے زیر عمل توازن میں جو جن کا وہ کسی نقطہ پر رہے ہے جہاں ر، ایک ثابت نقطہ و سے فاصلہ ہے اور اگر سیشہ کے دو متوازی تختیاں جن کے نزدیک تر رخوں کے درمیان بہت چھوٹا فاصلہ $\frac{1}{2}$ ج ہے مانع میں و کے متقابل جانبوں میں رکھ دی جائیں اور اگر ان تختیوں میں و کے مقابل چھوٹے سواخ ہوں جن میں سے مانع بہر کر جاسکتا ہے تو ثابت کر دکھو کہ اب جو ہر دو تختیوں کے بھیجے ہوئے دائری رقبوں کے اندرونی و بیرونی نصف قطر ہیں مساوات

مرج ث $(\frac{1}{1} - \frac{1}{2})$ و س حجم

سے مربوط ہونگے۔ جہاں وہ نادیدہ ہے جہاں ہوائی سطح شیشے کے ساتھ بناتی ہے اور اس اشعار کی مستقر ہے۔

۳۔ شیخے کی ایک بڑی تختی ایک مانع کی سطح سے اٹھائی گئی ہے اس طرح مانع ف ارتقاع تک اوپر کھینچ آتا ہے اور تختی کی غلی سطح کے ساتھ زاویہ تماس کا متمم رہے ثابت کر دو کہ مانع سے جیسکے ہوئے دائری حصہ کا نصف قطر تقریباً

$\frac{1}{3}$ ب^۲ (۱-۲ حجم $\frac{1}{3}$ ب^۲) / (ف-۲ ب^۲ جب $\frac{1}{3}$ ب^۲)

۳۔ — مائع کی ایک جہلی ایک گردش سطح کی شکل میں ٹنک میں رہی ہے اس کا محور انقباضی ہے۔ اس کی اوپر کی حد یا احاطہ ایک دائری تار ہے جو انقباضی تھا گیا ہے۔

$$+ ۲۸۸ ف^۳ ت^۳ ر^۳ + ۲۸۸ ف^۲ ت^۲ ح^۲ + ۲۸۸ ف ت ح + ۲۸۸ =$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں صابون کی جہلی (کے دونوں سطحوں) کا کل تناؤ فی اکائی طول ت سے تعبیر ہوتا ہے۔

۲۵۔ ایک مستوی تختی مانع میں جزو غرق کر دی گئی ہے۔ مانع کی کثافت σ اور سطحی تناؤ T ہے۔ مانع اور تختی کے واسطے کے لئے قوت شعری کا زاویہ θ ہے اور تختی افقی کے ساتھ زاویہ ϕ کا میلان رکھتی ہے۔ ثابت کرو کہ مانع کی ساکن سطح کے اوپر تختی کے دونوں رخوں پر مانع کے ارتفاعوں کا فرق ہے

$$2 \left\{ \frac{T \sin \theta}{\sigma} \right\} \text{ جم } ۲۰ - ۱۱ \text{ جب } ۲۰ - ۱۱$$

۲۶۔ ایک ذریعہ AB ج D میں سیدھے تاروں AB ، BC ، CD سے بنایا گیا ہے اور ان کو ایک مرغولہ D کی قوس سے ملا دیا گیا ہے مرغولہ کا زاویہ θ ہے۔ مرغولہ کا محور BC ہے اور AB ، BC ، CD طول L کے نصف قطر ہیں۔ اگر ذریعہ کو صابون کے محلول میں ڈبو دیا جائے تو ثابت کرو کہ ایک جہلی پیدا ہوگی جس کی سطحی توانائی ہوگی

$$\frac{T}{2} \{ 2\pi R + (1 + \pi) R \}$$

جہاں سطحی تناؤ T ہے اور R ، AB ، BC ، CD کے درمیان چھوٹا زاویہ θ ہے۔

(۱۹۵) ۲۷۔ کثافت ρ اور سطحی تناؤ T کا ایک سیال نصف قطر کی ایک شعاری نلی میں اوپر کھینچا گیا ہے جس کے ساتھ زاویہ تماس θ ہے۔ اگر T ، ρ ، h تو ثابت کرو کہ نلی کے محیط پر سیال جس ارتفاع تک چڑھتا ہے وہ ہے

$$\frac{2T}{\rho} \left(\frac{1}{\cos \theta} - 1 \right) \text{ جم } ۲۰ - ۱۱ \text{ جس } ۲۰ - ۱۱$$

جہاں θ کی تیسری اور اعلیٰ قوتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں۔

۲۸۔ بیٹی کثافت T کے تجاذبی مانع کا حجم $\frac{4}{3}\pi R^3$ ، πR^2 ، $2\pi R$ کے

$$y = \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right) + \frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{2} (a^2 + b^2)$$

۲۲۔ تاروں کا ایک فریم ب ارتفاع کے منشور کی شکل کا ہے جس کے قاعدے صلع و کے متساوی الاضلاع مثلث ہیں۔ اگر اس فریم کو صابون آمیز پانی میں ڈبو دیا جائے تو توازن کی حالت میں مستوی جہلیوں کی ترتیب کی تشریح کرو۔ مستوی جہلیوں کی صورت میں توازن کے امکان کے لئے ثابت کرو کہ ب، اگر ۱/۲ سے بڑا ہونا چاہیئے۔

۲۳۔ سیال کی ایک جہلی دو ایسے تاروں کو چپکی ہوئی ہے جن میں سے ہر ایک مرغولہ (Helix) کا ایک پیر (Turn) ہے دونوں مرغولوں کے محور ایک دوسرے پر منطبق ہوتے ہیں اور ان کے گام (Steps) متساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ جہلی کے توازن کی شرط پوری ہوگی اگر محور میں سے گزرنیوالی جہلی کی کسی قراض کی تقریبی مساوات

$$f = \frac{a^2 + b^2}{2} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} \right)$$

کی شکل کی ہو جبکہ ۲ = ہر مرغولہ کا گام یعنی دو متسللہ چوڑیوں (Threads) کا درمیانی فاصلہ۔

۲۴۔ تار کے ایک مرغولہ کی گھائی ب ہے اور اس کا طول بمقابلہ اس کے قطر کے بہت بڑا ہے اس کے محور کے سروں سے ایک چکدار ڈوری (لچک کی قدر ع) بانڈ دی گئی ہے تار کے ہر سرے کو نصف قطر کی سمت میں موڑ دیا گیا ہے تاکہ وہ محور سے جاملے۔ ڈوری جب سیدھی ہوتی ہے فوجست لیکن بے تنی ہوتی ہوئی ہے اگر مرغولہ اور ڈوری کو صابون کے محلول میں ڈبو کر نکال لیا جائے تو ایک جہلی تار اور ڈوری سے چپکی ہوئی نکلتی ہے ثابت کرو کہ سروں کے نزدیک کے حصوں کے سوا ڈوری نصف قطر کے ایک مرغولہ میں گھنچ جاتی ہے جہاں مساوات (۱۶) ۲ = ۲ (۲ - ۲) (۲ + ۲) ۲ = ۲ ۲ ۲

۱۷۔ ایک جابوتنی بلبلہ کو ایک گیس کی کیت سک سے بھر دیا گیا ہے جس کا دباؤ پیمائش پیش پر م × (اس کی کثافت) ہے۔ بلبلہ کا نصف قطر دوتا ہے جبکہ اس کو ہوا میں رکھ دیا جائے اس کے بعد بار پیمائش کا ارتفاع بڑھتا ہے اور پیمائش غیر متغیر رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ بلبلہ کا نصف قطر بڑھتا ہے یا گھٹتا ہے بوجب اس کے کہ جہلی کا تناؤ

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{M}{\pi} \text{ سے زیادہ یا کم ہو۔}$$

۱۸۔ ثابت کرو کہ مساوات

$$= \text{لامس (ای + جی)}$$

مائع کی جہلی کی ایک ممکن شکل کو تیسر کرتی ہے جبکہ دونوں طرف دباؤ وہی ہو۔

۱۹۔ اگر دو سوئیاں جو پانی پر تیر رہی ہیں متشاکلا ایک دوسرے کے متوازی رکھ دی جائیں تو ثابت کرو کہ وہ بظاہر ایک دوسرے کی طرف کھینچ آئیں گی اور یہ کہ یہ عمل کشش سطحی تناؤ کی وجہ سے ہوگا۔

۲۰۔ ایک چھوٹا کعب مائع میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ کعب کی سطح کے ساتھ مائع کا زاویہ تماس منفرد ہے اور π ۔ عہ کے مساوی ہے اور کعب کا اوپر کا رخ افقی ہے۔ اگر مائع کی کثافت ρ اور کعب کی ضخیم اور اگر سطحی تناؤ σ م ρ ہو تو ثابت کرو کہ کعب تیرے گا اگر

$$\frac{M}{\rho} > \frac{4\sigma}{\rho} + 2 \text{ جب } \left(\frac{\pi}{\rho} - \frac{\sigma}{\rho} \right)$$

۲۱۔ نصف قطر کے دو دائری قرص اس طرح رکھے گئے ہیں کہ ان کے مستوی ان کے مرکوزوں کو ملانے والے خط پر عمود ہیں۔ ان قرصوں کے محیطوں کو صابوں کی ایک جہلی سے ملا دیا گیا ہے جس کے اندر اتنی کیت کی ہوا ہے جتنی کہ اُسی کرہ ہوائی میں ج نصف قطر کے ایک کرہ کو عین بھر سکتی ہے۔ اگر جہلی اسطو اندہ کی شکل کی ہو جبکہ قرصوں کے درمیان فاصلہ ہر دو ثابت کر دے کہ قرصوں کے درمیان

فاصلہ کو ρ تک گھٹانا ہوگا تاکہ جہلی کرہ کی شکل اختیار کرے جہاں

۱۲۔ باریک سیدھے تار کا ایک فریم ذوار بختہ اسطرح یا چار سطحی کی شکل کا ہے اس کو صابون اور پانی کے محلول میں داخل کر کے اوپر کھینچ لیا گیا ہے جس سے بعض صورتوں میں مستوی جہلیاں پیدا ہوتی ہیں جن کی ابتدا کناروں سے ہوتی ہے اور جو ایک نقطہ پر آکر ملتے ہیں۔ ثابت کرو کہ ہر چار سطحی کے لئے توازن کی یہ شکل ممکن نہیں ہے اور یہ کہ یہ اس وقت ممکن ہے جبکہ ایک رخ متساوی الاضلاع مثلث اور دوسرے رخ متساوی الساقین مثلثات ہوں جن کے زوایا اس میں سے ہر ایک ایک قط (۱-۳) سے کم ہو۔

۱۳۔ شیٹے کی دو متوازی تختیوں کے درمیان بہت ہی کم فاصلہ د ہے۔ ان کے درمیان پانی داخل کیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ تختیاں ایک دوسرے کی طرف ایسی قوت سے کھینچ آئیں گی جو

۲۔ ا ب ت ج م + ب ت ج م

کے مساوی ہے۔ جہاں جہلی کا رقبہ ۱ اور اس کا گھیراؤ ب ہے۔
۱۴۔ شیٹے کا ایک کھوکھلا قائم مستطیر محروط متجانس مائع میں رکھا گیا ہے اسطرح کہ ایک محور انتصابی اور اس اوپر وار ہے۔ محروط میں کس بلندی تک مائع چڑھ سکتا ہے اندرونی مائع کی سطح کی تقریبی مساوات معلوم کرو۔ اسطوانہ کی صورت میں نتائج اخذ کرو۔
۱۵۔ ایک سوئی پانی پر تیر رہی ہے اس طور پر کہ اس کا محور پانی کی قدرتی ہموار سطح میں واقع ہے اگر فولاد کی کثافت اصنافی بلحاظ پانی کے $\frac{1}{2}$ ہو اور قوت شعری کا زاویہ θ ہو اور θ زاویہ $\frac{\pi}{2}$ ہو جو پانی کو مس کرنیوالی عمودی تراش کی قوس محور کے محاذی بناتی ہے تو ثابت کرو کہ

$$(A - \theta) \sin \frac{1}{2} \theta = (B - \theta) \sin \frac{1}{2} \theta \quad (A + \theta)$$

۱۶۔ ایک شعری نلی گردشی سطح کی شکل کی ہے اس کو انتصابی محور کے ساتھ ایک مائع میں جزو غرق کر دیا گیا ہے ٹکونی معنی کی مساوات معلوم کرو اگر مائع توازن میں ہے تو اس کا ارتفاع نلی میں کچھ ہی ہو۔

طول کی عددی قیمت کے مساوی ہے۔
اگر جہلی ذخیرہ سے علیحدہ کر دی جائے اور اگر شے سے کمیت فی اکائی رقبہ تعبیر ہو تو ثابت کرو کہ

$$ت = ع - \frac{ذ}{فرع} ، (کلک میا سکویں)$$

۷۔ متعدد صابونی بلبے ایک ہی مانع سے اٹھائے گئے ہیں اور پھر ان کو ایک دوسرے سے ملا دیا گیا ہے ایسی مساوات معلوم کرو جس سے حاصل شدہ بلبے کا نصف قطع معلوم ہو سکے۔ اور ثابت کرو کہ سطح کا گھٹاؤ حجم کے احضانے کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔
۸۔ پانی کا سطحی تناؤ جبکہ اس کے اوپر ہوا ہو ایسا ہے کہ ایک انچ پر کا زور تقریباً ۳۳ گرین وزن کے مساوی ہے۔ اگر ۱۰۰۰۰ کر دی قطروں کے ملنے سے بارش کا ایک قطرہ $\frac{1}{16}$ انچ قطر کا بنے تو ثابت کرو کہ سطحی تناؤں کا کام تقریباً ۱۲۷۷۰۰۰ فٹ پونڈ کے مساوی ہے۔

۹۔ اگر ایک جہلی اندرونی دیرونی غیر مساوی دباؤں کے زیر اثر ایک گردشی سطح بنائے تو ثابت کرو کہ نقطہ پیر کے ماسی مستوی کا محور کے ساتھ میلان $\frac{1}{2}$ اس مساوات

$$ج = \frac{ل}{و} + \frac{ب}{ل}$$

سے حاصل ہوگا جہاں نقطہ پیر سے محور پر کا عمود لا ہے اور $\frac{1}{2}$ ب مستقل ہیں۔
۱۰۔ مانع کے ایک قطرہ کا سطحی تناؤ یکساں ہے اسے ایک محور کے گرد گھمایا گیا ہے (۱۹۳۳)
ثابت کرو کہ سطح کا نصف انہاری منحنی، منحنی

$$\frac{ع}{م} = \frac{۱۲}{ر} - ۱$$

کے قطب کا گرد و نیہ (Roulette) ہوگا۔

۱۱۔ دو صابونی بلبے ایک دوسرے کو مس کرتے ہیں اگر بیرونی سطحوں کے نصف قطر r ، r ہوں اور اس دائرہ کا نصف قطر r ہو جس میں تینوں سطحیں قطع کرتی ہیں تو

$$\frac{۳}{۴} = \frac{۱}{r} + \frac{۱}{r} - \frac{۱}{r}$$

اُٹھائے گئے ہیں۔ اگر تناؤ فی خطی انچ علی الترتیب ایک گرین اور $\frac{1}{4}$ گرین کے اوزان کے مساوی ہوں اور نصف قطر $\frac{1}{4}$ انچ اور $\frac{1}{4}$ انچ ہوں تو دونوں صورتوں میں کل اندرونی دباؤ کا کل ہیرینی دباؤ پر جو اضافہ ہوا ان کا مقابلہ کرو۔

۴۔ اگر راور نصف قطر کے دو صابونی بلبے ایک ہی مائع سے اُٹھائے جائیں اور دونوں مکرر نصف قطر کا ایک بلبہ بن جائیں تو ثابت کرو کہ تناؤ

$$\frac{\pi}{4} \times \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1 + r_2}$$

کے مساوی ہے جہاں π کرہ ہوائی کا دباؤ ہے۔

۵۔ پانی اور ہوائی سطح فاصل کا سطحی تناؤ ۲۵ و ۸۵، پانی اور پارہ کی سطح فاصل کا ۶ و ۲۴، اور پارہ اور ہوائی سطح فاصل کا ۵۵ ہے۔ پارہ کی سطح پر پانی کا قطرہ رکھنے سے کیا اثر ظہور پذیر ہوگا۔

۶۔ تیل کے ایک قطرہ کو پانی کی سطح پر رکھتے ہی وہ فوراً انتہائی ریتھ پرست میں پھیل جاتا ہے تیل کے اس پھیلاؤ کے سبب کی تشریح کرو۔ اور منظر کے مشاہدے سے ثابت کرو کہ پرت کی موٹائی ۰۰۰۰۱ انچ سے کم ہو سکتی ہے۔

تیل کا دوسرا قطرہ سطح پر ڈال دینے سے کیا بات واقع ہوگی۔

۷۔ اگر ایک ہلکا سا کاسکے سرے ایک دوسرے سے بانڈ دئے گئے ہیں مائع کی جہلی کے اندرونی عدد کا ایک جزو ہو تو ثابت کرو کہ باگے کے ہر نقطہ پر انحصار مستقل ہوگا۔

اگر ناگہاں وزنی ہو اور جہلی ایک انحصاری محور کے گرد گردش کرے تو ثابت کرو کہ محل توازن میں تائے کا تناؤ ہوگا

$$\frac{L}{\pi r} \sqrt{r^2 - r_0^2}$$

جہاں L اس کا طول r ، اس کا وزن فی اکائی طول r_0 اور جہلی کا تناؤ ہے۔

۸۔ صابون آئیز پانی کے ذخیرے سے مائع کی ایک مستوی جہلی اُٹھائی گئی ہے ثابت کرو کہ توانائی (ع) فی اکائی رقبہ کی عددی قیمت، تناؤ (س) فی اکائی

لیکن $د ح = ک ط$ ، جہاں کہ مستقل ہے

$$\therefore د م ف ح = ک م ف ط - ح م ف د$$

$$\therefore ت \frac{ف د}{ف ط} = ک - ح \frac{ف د}{ف ط}$$

$$= ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ط})$$

$$= \frac{د ح}{ط} (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ط})$$

کہہ کے لئے $۱ = ۱۴$ اور $د = \frac{۲}{۳}$

$$\therefore ۱ = ۱۴ ت \frac{۲}{۳} د$$

پس مساوات بالا سے

$$- ۱۴ ت \frac{۲}{۳} د \frac{ف د}{ف ط} = ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ط})$$

$$\therefore ۲ - \frac{۱۴ ت}{د} \frac{ف د}{ف ط} = ک (۱ - \frac{ط}{د} \frac{ف د}{ف ط})$$

لیکن $د ح = ک ط$

$$\therefore \frac{۱}{۳} در (۱ = ک ط یا \frac{۲}{۳} ت) = ک ط$$

$$\therefore - \frac{۳ ک ط}{د} \frac{ف د}{ف ط} = ک - \frac{ک ط}{د} \frac{ف د}{ف ط}$$

$$\therefore ۱ = ۱ + \frac{۲ ط}{د} \frac{ف د}{ف ط}$$

$$\therefore د ط = مستقل$$

(۱۹۲)

امثلہ

۱۔ دو کروسی صابونی بجیلے ایک پانی سے اور دو سرابانی اور انگلی کے آمیزے سے

رائع کی چیلوں کے مضمون پر مختلف تصانیف و مقالوں کا مکمل تذکرہ
 پلاٹینور (Plateau) کی تصنیف اور (Encyclopaedia
 Britanica) میں پروفیسر کرک میکویل کے مضمون میں ملے گا۔ اور قوت
 شعری کے مضمون پر عموماً حسب ذیل کتابیں مفید ثابت ہو چکی

(۱۹۱)

Mathieu, *Theorie de la Capillarite*, 1883.

F. Neumann, *Vorlesungen über der Theorie der Capillaritat*, 1894.

Poincaré, *Capillarite*, 1895.

The articles *Kapillaritat* by H. Minkowski in *Encyklop der Math. Wissensch.* Bd. v. 1907, and by F. Pockels in *Winkelman's Handbuch der Physik*, Bd. i. 1908, both of which contain a full bibliography of the subject.

مثال — ایک مابونی بلبہ اپنے ثابت حدود سے بڑھتا ہے اس طرح
 کہ ان حدود کے ساتھ اس سے ایک بند نصف پیدا ہوتی ہے جس کا
 حجم ج ہے اس میں گیس دباؤ د پر ہے جس کی پیش مطلق ط ہے۔ گیس کی پیش میں
 میں بند رنج اضافہ کیا گیا ہے۔ اگر چلی کا رقبہ ل ہو جبکہ پیش ط اور دباؤ د ہے تو ثابت
 کر دو کہ

$$ت ط \frac{فرد}{فوط} = د ج (1 - \frac{ط}{د} \frac{فرد}{فوط})$$

جہاں سطحی تناؤ ت کو مستقل فرض کر لیا گیا ہے اور بیرونی دباؤ نظر انداز کر دیا گیا ہے۔

د اور ط میں ربط حاصل کرو جبکہ ملیکروسی شکل کا ہو۔

توانائی کا تغیر = ت مع ل

= د مع ج

بوجب اس کے کہ منحنی محور لاکھ طرف محذب یا مقعر ہے یا یعنی اوسط انحناء مستقل ہے۔ عام صورت میں ہمیں یہ شرط بیان کرنی پڑیگی کہ دئے ہوئے حجم کے لئے سطح اعظم ہے یا اقل اس سے وہی عام نتیجہ مستنبط ہوگا۔
۱۸۵۔ اگر جہلی گردش سطح کی شکل کی ہو تو ہم یہ ثابت کر سکتے ہیں کہ نصف النہاری منحنی ایک ایسی مخروطی کے واسطے کا طریق ہوتا ہے جو ایک خط مستقیم پر لڑک رہی ہو۔ اگر مخروطی کا نصف قطر انحناء اور واسطہ اس کے طریق کا نصف قطر انحناء ہو تو

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{s \cdot n} - \frac{m \cdot s \cdot n}{s \cdot n^2} \quad (\text{شکل دیکھو اگلے صفحہ پر})$$

$$\frac{1}{s \cdot n} - \frac{n \cdot n}{n \cdot s \cdot n} = \frac{n}{s \cdot n} \quad \text{کیونکہ گسٹن} \cdot n \cdot s \cdot n \text{ پر عمود وار ہے}$$

$$\frac{1}{s \cdot n} - \frac{n}{s \cdot m \cdot n} = \frac{n}{s \cdot m \cdot n}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{s \cdot n} - \frac{n}{s \cdot m \cdot n}$$

مکانی کی صورت میں یہ صفر ہو جاتا ہے اور اسلئے $r = -s \cdot n$ ۔

(۱۹۰) باقی کے لئے $\frac{s \cdot m \cdot n}{s \cdot n \cdot n} = \frac{b \cdot j}{s \cdot n \cdot n}$

جہاں m دوسرا واسطہ ہے اور اس لئے $\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{a \cdot j}$

اور دائرہ کے لئے $\frac{1}{r} + \frac{1}{s \cdot n} = \frac{1}{a \cdot j}$

لے دیکھو جیلٹ کا (Calculus of Variations) یا ماڈرن ٹریکٹریکس (یا ماڈرن ٹریکٹریکس)۔

لے دیکھو Roulettes and Glissettes

جائے اور پخلا نیچے وار تو ہر صورت میں جبلی محو کی طرف حرکت کریگی۔
پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بیرونی جانب کا ذخیرہ ناقائم ہے اور اندرونی
جانب کا غیر قائم۔
یہ استدلال کسی دوسری طرح کے ہٹاؤ پر صادق نہیں آتا اور اسلئے
قائمیت کے مکمل ثبوت کے لئے احصائے تغیرات کے طریقوں سے مدد لینا
ضروری ہے۔
۱۸۳۔ اگر جبلی کے دونوں جانب دباؤ مختلف ہوں اور ان کا فرق د ہو تو
توازن کی شرط ہوگی

$$\frac{d}{t} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

یا یہ کہ اوسط انخما مستقل ہوگا۔
(۱۸۹) گردشیں سطحوں کی صورت میں اس ربط کو ثابت کرنے کے لئے ہم
اصول توانائی کا استعمال کریں گے۔
د کا مستقل ہونا اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے کہ سرے بند کردئے
گئے ہیں اور اندرونی ہوا کا حجم مستقل ہے۔
اس طرح جملہ

$$k(\pi r^2 \text{ فرس} + \pi r^2 \text{ فرلا})$$

کا تغیر صفر ہوگا۔

جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\frac{فرلا}{فرس} = \frac{r}{r} - \frac{r}{r} \text{ اور } \frac{فرلا}{فرس} = \left(\frac{r}{r} - \frac{r}{r} \right) \frac{فرلا}{فرس}$$

پس اگر ن گ عماد ہو تو

$$\frac{1}{n} \pm \frac{1}{r} = \frac{1}{r} \text{ کیونکہ } \frac{فرلا}{فرس} = \frac{1}{r}$$

خط پر عمود وار ہوں تو تاروں کو مانع کی جلی سے ملانا ہمیشہ ممکن نہیں۔ بعض صورتوں میں دو میں سے ایک زنجیرہ نما سے تاروں کو ملانا ممکن ہے لیکن اوپر کے زنجیرہ کو نگھانے سے جو زنجیرہ نما پیدا ہوتا ہے اس کی صورت میں توازن قائم ہوگا اور دوسرے زنجیرہ نما کی صورت میں غیر قائم ہوگا۔ (۱۸۸)

جب صرف ایک زنجیرہ نما ہو تو توازن غیر قائم ہوگا۔ اس مسئلہ کا ایک غیر مسلسل حل بھی ہے جس میں دو دائروں کو ان نقطوں کے معینوں کو نگھانے سے حاصل کیا جاتا ہے اور ان کے مرکز ایک لا انتہا سبک اسطوانے سے ملائے جاتے ہیں۔

انسائیکلو پیڈیا بریٹانیکا (Encyclopaedia Britanica)

میں کلرک میکسویل Clerk Maxwell نے وقت شعری پر

ایک مضمون میں اس مسئلہ پر اس طرح روشنی ڈالی ہے۔ جب دو زنجیرے جن کا مرتب وہی ہو دو دئے ہوئے نقطوں میں سے کھینچے جاسکیں اور مرتب کے گرد ان کو نگھانے سے دو زنجیرہ نما حاصل کئے جائیں تو ہر زنجیرہ نما کا اوسط انحناء صفر ہوتا ہے۔

اگر ان دو زنجیروں کے درمیان ایک دوسرا زنجیرہ انہی نقطوں میں سے گزرتا ہوا کھینچا جائے تو اس کا مرتب ان دونوں کے مرتب کے اوپر ہوگا اور اسلئے کسی نقطہ پر اس کا نصف قطر انحناء اس فاصلے سے کم ہوگا جو عاودہ کی سمت میں اس نقطہ اور پہلے مرتب کے درمیان ہے۔

اس لئے گردشیں سطح کا اوسط انحناء محور کی طرف محذب ہوگا اور یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ان میں سے کسی زنجیرہ نما کو دونوں زنجیرہ نماؤں کے درمیان کے کسی زنجیرہ نما پر ہٹا دیا جائے تو پہلی محور سے ہٹ جائیگی۔

پھر اگر ایک زنجیرہ نما دونوں زنجیرہ نماؤں کے باہر لیا جائے تو اس کا اوسط انحناء محور کی طرف مقعر ہوگا اور اس لئے اگر اوپر کا زنجیرہ نما اوپر وار ہٹایا

۱۹ انسائیکلو پیڈیا کی گیارہویں اشاعت میں لارڈ ریالے نے اس مضمون کی نظر ثانی کی ہے۔

فرض کرو کہ $\frac{y}{x} = 1 + \frac{u}{x}$ تو

$$r = \frac{1}{x} \left(\frac{y}{x} + \frac{y}{x} \right)$$

جس سے ظاہر ہے کہ گردشی سطح کی شکل کی جہلی کی ممکنہ شکل صرف زنجیرہ بنا ہے جبکہ دونوں رخنوں پر دباؤ دہی ہو۔

۱۸۳۱۔ اصول توانائی کی مدد سے بھی یہی نتیجہ حاصل ہوتا ہے کیونکہ سطح

۱۸۳۲ فرس

اس صورت میں اعظم یا اقل ہوگی اور احصائے تغیرات کی مدد سے اس سے جو تکوینی مستحی حاصل ہوگا وہ ایک زنجیرہ ہوگا جس کا مرتب گردش کا محور ہوگا۔

ٹاؤ ہنٹر کی کتاب (Researches in the Calculus of Variations)

میں یہ بتایا گیا ہے کہ جب ایک خط مستقیم اور دو نقطے ایک ہی ستوی میں دئے جائیں تو ہمیشہ ایسے زنجیرہ کا کھینچنا ممکن نہیں جو ان نقاط میں سے گزرے اور جس کا مرتب یہ خط مستقیم ہو۔

یہ بھی دکھایا گیا ہے کہ چند مشرقی نقطے کے تحت ایسے دو زنجیرے کھینچے جاسکتے ہیں اور یہ کہ ایک خاص صورت میں صرف ایک زنجیرہ ایسا کھینچنا جاسکتا ہے۔ یہ دونوں زنجیرے جب موجود ہوں تو ایسی شکل کا جواب ہوتے ہیں جو ایک بند (بے سرا) ڈوری کو دو چکنی کھونٹیوں پر لٹکانے سے پیدا ہوتی ہے۔

جب اس قسم کے دو زنجیرے ہوں تو اوپر کے زنجیرہ کو مرتب کے گرد گھمانے سے جو سطح پیدا ہوتی ہے وہ اقل ہوتی ہے لیکن نچلے زنجیرے کو گھمانے سے جس سطح کی تکوین ہوتی ہے وہ اقل نہیں ہوتی۔ جب صرف ایک زنجیرہ ہو تو سطح اقل نہیں ہوتی۔

پس اگر دو دائری تاروں سے ایک ایسا فریم بنایا جائے کہ ان تاروں کے مستوی ایک دوسرے کے متوازی اور ان کے مرکوزوں کو ملائے والے

جن میں سے ہر ایک ایسی سطح ہے جس کا اوسط انحناء صفر ہے۔

پلاٹو (plateau) کی تصنیف

Sur les liquides Soumis aux seules forces moléculaires, 1873

میں علماء ریاضی نے اس مضمون پر جو محنتیں کی ہیں اُن کا شاندار تذکرہ کیا گیا ہے اور اس نے خود اپنے تجربات بھی اس کتاب میں درج کئے ہیں۔ ڈاربو

Theorie Generale des surfaces کی کتاب Darbou

minima Surfaces کے حصہ اول باب سوم میں قل سطحوں

کی پوری تفصیل موجود ہے یعنی ایسے سطحوں کی جو متذکرہ بالا شرط کو پوری کرتی ہیں۔

۱۸۲— اگر چلی کی شکل گردشی سطح کی ہو تو سطح کے محور کو محوری قرار دینے سے

$$r^2 = \lambda^2 + \mu^2 = f(y)$$

اس صورت میں اوسط انحناء کے صفر ہونے کی شرط سے حاصل ہوگا

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2} = 0$$

$$r^2 = \frac{f(y)}{f'(y)} + 1$$

$$\frac{f(y)}{f'(y)} = \frac{1}{r^2} \text{ اور } y + b = \text{لوک} (r + \sqrt{r^2 - \lambda^2})$$

$$\frac{y+b}{r} + \frac{y+b}{r} = r$$

اگر ہم یہ مان لیں کہ بلبلے کے اندر دنی و بیرونی دباؤں کا فرق بمقابلہ کرہ ہوائی کے دباؤ کے چھوٹا ہے تو $\frac{2}{\pi} \frac{t}{r}$ کو ہم چھوٹا فرض کر سکتے ہیں اور اسلئے آخری جملہ ہو جاتا ہے

$$\left\{ \frac{2}{\pi} \frac{t}{r} + \pi \right\} \left(\frac{2}{\pi} \frac{t}{r} - \left(\frac{2}{\pi} \frac{t}{r} - \frac{2}{\pi} \frac{t}{r} \right) \right) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{r}$$

$$\frac{2}{\pi} \frac{t}{r} \times \frac{2}{\pi} \frac{t}{r} = \frac{2}{\pi} \frac{t}{r}$$

پس ہوا کو پھکانے میں جو کام ہوا وہ اُس کام کے ساتھ $t : r$ کی نسبت رکھیں گے جو جہلی کو ہا ہر پھینچ لینے میں ہوا۔

۱۸۱ — مانع کی جہلیوں کی شکلیں۔ اگر جہلی کے دونوں رخوں پر ہوا کا دباؤ وہی ہو تو توازن کی شرط یہ ہوگی کہ

$$= \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

یا یہ کہ اوسط انحناء صفر ہے۔

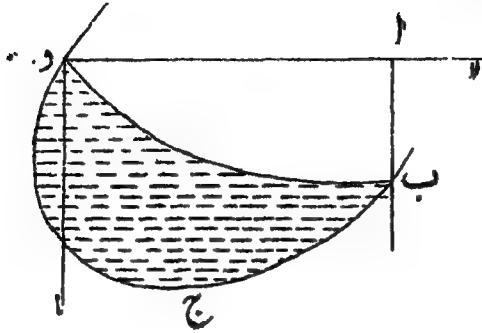
یہ شرط زنجیرہ نما (Catenoid) اور مرغول نما (Helicoid) کی صورتوں میں پوری ہوتی ہے جو اس لئے مانع کی جہلیوں کی ممکنہ اشکال ہیں۔ کارٹیزی محدودوں میں یہ مساوات دفعہ (۱۲۵) کے بموجب ہو جائیگی

$$\left\{ \frac{2}{\pi} \frac{t}{r} + \pi \right\} \left(\frac{2}{\pi} \frac{t}{r} - \left(\frac{2}{\pi} \frac{t}{r} - \frac{2}{\pi} \frac{t}{r} \right) \right) = \frac{2}{\pi} \frac{t}{r}$$

بڑے بڑے علماء ریاضی نے متعدد مقالوں میں اس مساوات پر بحث کی ہے چنانچہ اس مساوات کے چند مشہور خاص حل حاصل ہو چکے ہیں۔ مثلاً

$$t = \frac{r}{2} \quad \text{اور} \quad \frac{t}{r} = \frac{1}{2} \quad \text{جہیز لا جہیز}$$

اس کو بہ آسانی تکمل کر سکتے ہیں۔



یہ مساوات مستقلوں کی خاص قیمتوں کے لئے دائرہ یا زنجیرہ کو تعبیر کر سکتی ہے۔
۱۷۹۔ تاگے کے ایک عنصر کے توازن پر غور کرنے سے بھی اس سوال کو حل کیا جاسکتا ہے۔
وہ جسے قوس کو ناپ کر فرض کر دو کہ ن پر کے ماس کا میلان د کے ساتھ ف ہے۔

تب اگر ن پر تاگے کا تناؤ ت اور جہلی کا تناؤ ت ہو تو مساواتیں
مف ت + ومف س × جب ف = ۰،

$$\frac{\text{ت مف ن}}{\text{ت مف س}} = \frac{\text{ت مف س} + \text{ومف س} \times \text{جم ف}}{\text{ت مف س}}$$

حاصل ہوتی ہیں جہاں نقطہ ن پر تاگے کا نصف قطر انحناء ہے۔

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرا}} = \frac{\text{ت}}{\text{د}} = \frac{\text{ت}}{\text{د} - (۱ - ۱)} \quad \text{پن}$$

$$\frac{\text{ع - فرا}}{\text{فرا}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(۲ع + ۱)} = \frac{1}{\frac{1}{2}(۲ع + ۱)} \quad \text{اور}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(۲ع + ۱) - \frac{1}{2}(۲ع + ۱) \quad \text{اس لئے}$$

کسی رخ کے سطحی تناؤ کا دو چند ہے۔

۱۷۸۔ انتصابی مستوی میں کسی شکل کا ایک تار ہے جس کے دو نقطوں پر دوئے ہوئے وزن اور طول کا تاگا باندھ دیا گیا ہے۔ مائع کی ایک مستوی

جہلی کے حدود یہ تار اور تاگا ہیں۔

تاگے کی اختیار کردہ شکل کو معلوم کرنے کے لئے ہم یہ شرط بیان کریں گے کہ اس نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہے۔

اگر رتبہ و ا ب ج ' ا ہو تو جہلی کی توانائی

= س ا - کس مافرا

اور اگر تاگے کے اکائی طول کا وزن و ہو تو نظام کی توانائی بالقوہ اقل ہوگی جبکہ کس مافرا + و ک مافرس

اعظم ہو بشرطیکہ

ک مافرس = ل

پس ہمیں یہ معلوم کرنا ہوگا کہ کس بشرط کے تحت جملہ

(۱۸۲)

ک ا س م + (و م + ل) م ا + ۱ ع { فرلا

کا تغیر صفر ہو جاتا ہے۔

احصاء تغیرات کی مدد سے اس شرط سے مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{و م + ل}{س م} = \frac{۱ ع + ۱ م}{س م} = \frac{و م + ل}{س م} = \frac{۱ ع + ۱ م}{س م}$$

∴ فرلا کی شکل $\frac{و م + ل}{س م} = \frac{۱ ع + ۱ م}{س م}$ ہوگی

۴ ت جب $\frac{1}{2}$ (ط - عہ) = ج ث (ک جم ط - ف) ۲

جہاں وقت شہری کا زاویہ عہ، سوئی کے اکائی طول کا وزن و، پانی کی قدرتی سطح کے اوپر سوئی کے محور کا ارتفاع ف اور زاویہ ن وقت $\frac{1}{2}$ ط ہے۔

۵۶۔ مانع کی جہلیاں۔ مانع کی جہلیاں مختلف طریقوں سے پیدا کی جاتی ہیں۔ صابونی بلبلہ ایک عام مثال ہے۔ صاف شیشے کی بوتل کو جس میں کچھ لزج مانع ہو لانے سے یا صابون اور پانی یا صابون اور گلیسرین کے محلول میں تار کا ایک فریم ڈبو کر اس کو بتدریج باہر نکال لینے سے مانع کی جہلیاں پیدا کی جاسکتی ہیں اور ان کی خصوصیات کا مشاہدہ کیا جاسکتا ہے۔

(۱۸۳)

جھیلوں کا ظاہر مستوی کی شکل میں حاصل ہونا اس بات کی دلیل ہے کہ جاذبہ ارض کا عمل بمقابلہ جہلی کے تناؤ کے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

یہ دیکھنے میں آتا ہے کہ بہت چھوٹے ماسی عمل سے بھی جھلی بھٹ جاتی ہے جس سے یہ متنبط ہوتا ہے کہ اس کے کسی خط پر کا زور کلا اس خط کے عمودی سمت میں ہوتا ہے اس سے دفعہ (۱۴۹) کی طرح یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ تناؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔

۵۷۔ مستوی جہلی کی توانائی۔ لزج مانع کے اندر سے اگر ایک مستوی جہلی نکال لی جائے تو کچھ کام کیا جاتا ہے۔ یہ کام جہلی کی توانائی بالقوہ کو تعبیر کرتا ہے۔

ایک مستطیلی جہلی اب ج د کا تصور کرو جو سیدھے تاروں ا د ب ج سے محدود ہے۔ اب مانع کی سطح میں ہے اور ج د حرکت پذیر ہے۔

جہلی کو باہر نکال لینے میں جو کام ہوگا وہ تہ اب د کے مساوی ہوگا اور اس لئے اگر سطحی توانائی فی ایکائی رقبہ میں ہو تو یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

س = ت
یہ یاد رہے کہ جس چیز کو ہم نے یہاں جہلی کا تناؤ کہا ہے وہ جہلی کے

لا = طا (سم) - طا (۶ + سم) + لم (۶ - سم) (ل + ب - ب)

اور ما = فھ (۶ + سم) + لم (۲ ل + ۲ ب + ب)

بڑے قطرے کے لئے حسب سابق

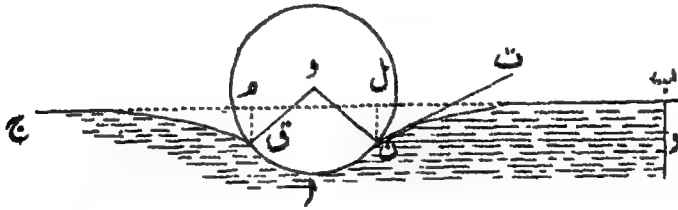
ر = ف قطعہ

جہاں پانی کی سطح اور ہر تختی کی سطح کے درمیان حادہ زاویہ عم ہے۔

۱۷۵۔ تیرنے والی سوئی۔ پانی کی سطح پر سوئی کے تیرانے کے مشہور

تجربہ کی توجہ سطح کے قوانین کے ذریعہ ہو سکتی ہے۔

شکل سوئی کی تراش کو اور اس کے محور کے علی القوائم پانی کی سطح کی تراش کو تعبیر کرتی ہے سوئی پر عمل کرنے والی قوتیں ہیں ت اور ف پر کے تناؤ اور حصہ ن اف پر پانی کا دباؤ جو پانی کے حجم ن اف مر کے وزن کے مساوی ہے یہ سب قوتیں سوئی کے وزن کو تھامتھی ہیں۔



مزید برآں ن پر کے تناؤ کا افقی جزو تحلیل اور ب د پر کا افقی آبی دباؤ مرکب

پر کے تناؤ کے مساوی ہیں جہاں ن د افقی اور ب د انتصابی ہے۔

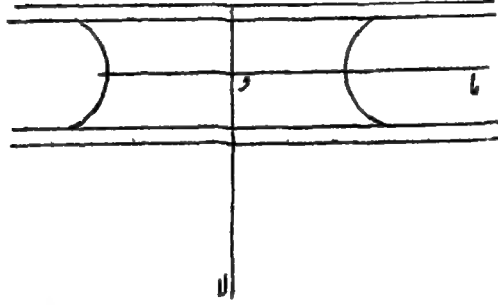
ان شرائط سے توازن کی تعین ہوتی ہے اور حسب ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۲ ت جب (ط - عم) + ج ث ک (ک ط + ک جب ط حجم ط - ۲ ف جب ط) = و

۳۳ ہو اور اگر نصف النہاری منحنی کا نصف قطر انحناء ہو اور علی التوائم عمادی تراش کا نصف قطر انحناء یعنی عماد کا وہ طول جو سطح کے محور سے قطع ہوتا ہے تو توازن کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{صند}}{\text{ت}} = \frac{\pi - \pi}{\text{ت}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

کیونکہ اگر ہم عماد کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کریں تو ثنائوں کا حاصل سمتیں باہر کی طرف ہوگا اور دوسرے دو ثنائوں کا حاصل اندر کی طرف -



حسب سابق لاکو تختیوں کے درمیان وسطی سطح سے نیچے دار ناپنے سے مساوات بالا ہو جائے گی

$$\frac{\text{ع فرع}}{\text{فنا}} = \frac{1}{\frac{1}{r} (2e+1)} - \frac{\text{صند}}{\text{ت}} = \frac{2}{\text{ب}} \quad \text{فرض کرو}$$

جس سے مساوات

$$\frac{\text{ب با}}{\frac{1}{r} (2e+1)} = \text{ل ب} + \text{ل} - \text{ا}$$

حاصل ہوگی اور اس سے گذشتہ دفعہ کی طرح ہم اخذ کر سکتے ہیں

پس فرلا = {فہ (۶ + سم) + ۱/۲ (ب + ل - ل')} فرء

اور مکمل سے لا + متقل = طا (۶ + سم) + ۱/۲ (ب + ل - ل')

لیکن لا = ۰ جبکہ ی = ل'

یا جبکہ و = ۰ - ۱/۲ ل' + ۱/۲ (ل - ب) = ع = ۳ = فہ (سم)

اس طرح لا کی اس قیمت کے لئے ۶ کو صفر ہونا چاہیئے۔

۱۰ لا = طا (۶ + سم) - طا (سم) + ۱/۲ (ب + ل - ل')

اور ما = فہ (۶ + سم) + ۱/۲ (ل' - ل' - ل' - ب + ب')

سے کارٹیزی محدود کی قیمتیں مبدل ۶ کی رقوم میں حاصل ہوتی ہیں۔

اگر قطرہ اس قدر بڑا ہو کہ ہم ۱/۲ کو نظر انداز کر سکیں تو ر = ۱/۲ = ۱/۲

اس طرح نصف النہاری منحنی دائرہ ہوگا۔

اس صورت میں اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ۲ ف ہو تو شکل سے ظاہر ہے کہ

۱۸۱

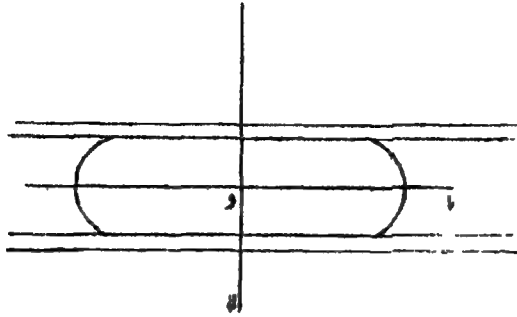
ر = ف قطع

جہاں عہ وہ حادہ زاویہ ہے جو پاؤہ اور ہر تختی کی سطح کے درمیان باہر کی طرف بنتا ہے۔

۱۷۴ م — اگر شیئے کی دو متوازی افقی تختیوں کے درمیان پانی کا ایک قطرہ گردشی سطح کی شکل اختیار کرے تو سطح ضد انحنائی (Anticlastic)

ہوگی کیونکہ پانی اور شیئے کا زاویہ تماس حادہ ہے۔

اس صورت میں اگر کہ ہوائی کا دباؤ II اور قطرہ کے اندر پانی کا دباؤ



اس صورت میں لا کو اُس مستوی سے نیچے دارنا پنا مناسب ہوگا
جو تختیوں کی دونوں سطحوں کے وسط میں واقع ہے اور تب ہمیں مساوات

$$- \frac{ع}{\frac{ع}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}(ع+1)} + \frac{ع}{\frac{ع}{2}(ع+1)}$$

(فرض کردہ) ، $\frac{ب}{ب} = \frac{صنہ}{ت} =$

حاصل ہوگی۔
تکمل کرنے سے اور ما = ل، جبکہ لا = ۰ لینے سے

$$\frac{ب}{ب} = \frac{ل+ل-ب}{\frac{1}{2}(ع+1)}$$

$$\frac{ل+ل-ب}{\frac{1}{2}(ع+1)} = \frac{فرا}{فرا}$$

اس طرح

۱۸۰ رکھو ما = ی تو

$$\frac{(ی+ل-ب)(ل-ب)}{\frac{1}{2}(ع+1)} = \frac{فرا}{فرا}$$

اگر ہم لکھیں ی = ۰ و + $\frac{ل}{ل} + \frac{ل}{ل} (ل-ب)$ تو حاصل ہوگا

اس طرح فرا = ک (قم طہ - ۲ جب طہ) فرطہ
 ۱ + ب = ک لوک مس $\frac{طہ}{۲}$ + ۲ ک جم طہ
 ۱ + ب = ک لوک $\frac{۲ ک - ۲ ک - ۲ ک}{۲}$ + $\frac{۲ ک - ۲ ک}{۲}$ لا
 جہاں ب مستقل ہے۔
 اُس نقطہ پر جہاں ماس انقباضی ہے ع = ۰ اور
 ۲ ک = لا

اگر نصف النہاری مہجی اور افقی مستوی کے درمیان حادہ زاویہ ع ہو
 یعنی پارہ مستوی کو جس زاویہ پر ملتا ہے وہ ۲ - ع ہو اور اگر قطرہ کا ارتقاع
 ۱۷۹ ف ہو تو

$$ف = - \left(\frac{۲}{۲} - ع \right) \text{ جبکہ } لا = ف$$

اور ۲ ک جم ع = ف

۳۔ ۱۔ متوازی تختیوں کے درمیان قطرہ - اگر پارہ کا ایک قطرہ
 شیشے کی دو متوازی افقی تختیوں کے درمیان رکھ دیا جائے جو ایک
 دوسرے سے اس قدر نزدیک ہیں کہ جاذبہ ارض کا عمل نظر انداز
 کیا جاسکتا ہے تو قطرہ کے اندر دباؤ مستقل ہوگا اور اگر سطح گردشی سطح
 ہو تو ہمیں مساوات

$$\frac{۱}{صنہ} = \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر}$$

حاصل ہوگی جہاں اندرونی دباؤ کا اضافہ کرہ ہوائی کے دباؤ پر صنہ ہے۔

(۱۷۸)

اور نصف النہار می منحنی کی تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{r} = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f}{r} \right) + 1 \right\}} + \frac{\frac{f}{r}}{\left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{f}{r} \right) + 1 \right\}}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{2}{r} = \frac{1}{\left\{ \frac{1}{2} (e+1) \right\}} + \frac{e}{\left\{ \frac{1}{2} (e+1) \right\}}$$

$$\frac{f}{r} = e$$

پس اگر نصف النہار می منحنی کے کسی نقطہ پر ماس کا میلان محور لاکے
ساتھ ہو تو $e = \text{مس فہ}$ اور

$$\therefore \text{جم فہ} = \left(\frac{f}{r} - \frac{1}{2} \right) = \left(\frac{f}{r} - \frac{1}{2} \right)$$

اگر قطرہ اتنا بڑا ہو کہ ہم اس کی چوٹی کو چپٹا تصور کر سکیں اور اگر افقی
تراشوں کے انحناء کو نظر انداز کیا جائے تو مساوات (۱) ہو جائے گی

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{e}{\left\{ \frac{1}{2} (e+1) \right\}}$$

$$\text{اس طرح} \quad \frac{e}{\left\{ \frac{1}{2} (e+1) \right\}} = 1 - \frac{1}{\left\{ \frac{1}{2} (e+1) \right\}} \quad \text{کیونکہ } e = \infty \text{ جبکہ } \frac{1}{r} = 0$$

$$\frac{f}{r} = \frac{2k-2}{\left\{ \frac{1}{2} (2k-2) - \frac{1}{2} (2k-2) \right\}}$$

اس مساوات کا تکمیل کرنے کے لئے رکھو $\frac{1}{r} = 2k$ جب ط

توازن کی مساوات ہوگی

$$\frac{\text{صنہ}}{\text{ت}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$

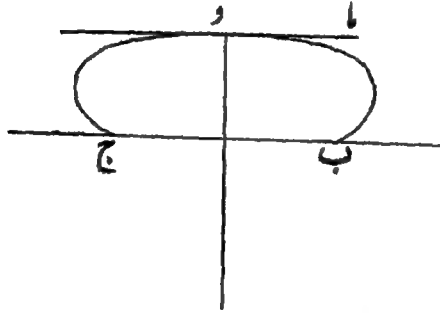
جہاں سطحی تناؤ ہے اور اندرونی دباؤ اور کرہ ہوائی کے دباؤ کے درمیان فرق صنہ ہے۔

عام طور پر قطرہ ایک گردشی سطح کی شکل اختیار کرے گا۔

اس صورت کو لیکر فرض کرو کہ مانع کے اندر بلند ترین نقطہ پر دباؤ π ہے اور کرہ ہوائی کا دباؤ π ہے۔ تب لا کو بلند ترین نقطہ سے نیچے وارنا پئے سے

$$\text{صنہ} = \pi + \text{ج ث لا} - \pi$$

$$\frac{\pi - \pi + \text{ج ث لا}}{\text{ت}} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r}$$



پس اگر بلند ترین نقطہ پر نصف قطر اختیار ہو تو

$$\frac{\pi - \pi}{\text{ت}} = \frac{2}{r}$$

$$\text{اور } \frac{\pi - \pi}{\text{ت}} + \frac{2}{r} = \frac{\text{ج ث لا}}{\text{ت}} + \frac{2}{r} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \quad (1)$$

اگر ہم شیشے پر پارہ کے قطرہ کی یا فولاد پر پانی کے قطرہ کی صورت لیں تو مشاہدہ سے معلوم ہو گا کہ فرما/فرلا اس سے نیچے وار گھٹتا جاتا ہے

میں لکھی جاسکتی ہے۔
 نیز اگر نلی کا اندرونی نصف قطر r ہو اور مائع نلی کی سطح کو جس حادہ زاویہ پر ملتا ہے وہ θ ہو تو

$$\frac{r}{\cos \theta} = \frac{r}{\cos \theta} = r$$

اگر زاویہ تماس منفی ہو تو مائع نلی میں نیچے دبا ہوا ہوگا اور اگر ہم ماکو نیچے وارنا ہیں تو مائع کی سطح کے عین نیچے اس کا دباؤ گرہ ہوائی کے دباؤ سے بقدرج ث ماکے بڑا ہوگا۔

زیر بحث صورت چونکہ بارہا کے اندرونی پارہ کی آزاد سطح پر بھی مشتمل ہے اس لئے اس مضمون پر کافی بحث و تحقیق ہوتی رہی ہے چنانچہ نصف النہاری منحنی کی تفرقی مساوات کا حل (Lohnstein) نے ایک سلسلہ کی شکل میں حاصل کیا جو مستند رہتا ہے جب تک کہ منحنی کا تماس انتظامی نہیں ہو جاتا۔ (C. Runge) نے تفرقی مساواتوں کو حل کرنے کے عددی طریقہ کے ضمن میں مثال کے طور پر اس مساوات پر غور کیا۔ لارڈ کیلون نے رسالہ (Nature) میں شماری منحنیوں کی تقریبی شکل دریافت کرنے کے ایک ہندسی طریقہ کی نشان دہی کی جس پر بالتفصیل (C. V. Boys) نے بحث کی۔ (F. Neumann) نے بھی معلوم کیا ہے۔ (۱۷۷)

۱۷۲۔ مائع کا قطرہ۔ اگر مائع کا ایک قطرہ ایک افقی میز پر رکھ دیا جائے تو

Dissert. Berlin, 1891

Math. Annalen, 46 (1895), p. 167.

Nature, July and August, 1886.

Phil. Mag. Series 5, Vol. 36, p. 75, 1893.

Vorlesungen über die Theorie der Capillarität. Leipzig. 1894.

۱
۲
۳
۴
۵

$$\text{یعنی فہم } ۶ = \frac{\text{مہ} (۵ + \text{جب عہ}) / ۳ - (۱ + \text{جب عہ})}{۳ (۱ - \text{جب عہ})}$$

مزید یہاں ہم یہ دیکھتے ہیں کہ ربط (۳) کی مدد سے ربط (۲) اس شکل میں لکھا جاسکتا ہے

$$\frac{۲}{۱} \text{ مہ} / \text{ک} = (۱ - \text{مہ}) \frac{\text{فہم } ۶ - \text{عہ}}{\text{فہم } ۶ - \text{عہ}}$$

نیز یہ کہ نقاط (۱) اور (۲) کے ارتفاع علی المرتبہ ۲ مہ / ک = مہ - ۱

اور مہ - جب عہ سے حاصل ہوتے ہیں۔

۱۷۱۔ دائری نلی۔ انتصابی دائری نلی کے اندرونی مانع کی سطح کی

شکل کے لئے تفرقی مساوات حاصل کرنا جبکہ نلی مانع میں جزو غرق ہو۔

دفعہ (۱۷۰) کی شکل کو سطح کی نصف النہاری تراش قرار دینے سے دفعہ ۱۶۴ (۱۷۰) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} = \frac{\text{ج ثا}}{\text{ت}} = \frac{\text{مہ}}{\text{ک}}$$

جہاں کہ ہوائی کا دباؤ مانع کی سطح کے عین نیچے مانع کے دباؤ سے بقدر ج ثا کے بڑا ہے۔

اب چونکہ ر = لاقم نہ ، ہیں مساوات

$$\frac{\text{مہ}}{\text{ک}} = \frac{\frac{\text{فہم}}{\text{فہم}}}{\left\{ \frac{\text{فہم}}{\text{فہم}} + ۱ \right\}} + \frac{\frac{\text{فہم}}{\text{فہم}}}{\left\{ \frac{\text{فہم}}{\text{فہم}} + ۱ \right\}}$$

حاصل ہوتی ہے جو شکل

$$\frac{\text{مہ}}{\text{ک}} = \frac{\frac{\text{فہم}}{\text{فہم}}}{\left\{ \frac{\text{فہم}}{\text{فہم}} + ۱ \right\}}$$

$$\text{فہ} = \text{ع} = \text{فہ} = \text{سم} \quad \text{اور اس لئے}$$

$$\text{سم} = \text{سم} = \text{سم} + \text{سم} \quad [\text{سم} = \text{سم}]$$

$$\text{اور} \quad \text{و} = \text{فہ} (\text{سم} + \text{سم})$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم} = \text{و} + \frac{1}{\text{ع}}$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{فرء}} = \text{فہ} (\text{سم} + \text{سم}) + \frac{1}{\text{ع}}$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{لاک}} = \text{ستقل} = \text{طا} (\text{سم} + \text{سم}) + \frac{1}{\text{ع}}$$

$$\text{اور} \quad \text{لا} = \text{جب کہ} \quad \text{ع} = \text{سم}$$

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{لاک}} = \text{ع} = \text{طا} (\text{سم} + \text{سم}) + \text{طا سم} \dots (1)$$

$$\text{نیز} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{لاک}} = \text{م} = \text{ی} = \text{ع} = \text{و}$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{\text{فرلا}}{\text{لاک}} = \text{ع} = \text{فہ} (\text{سم} + \text{سم}) \dots (2)$$

حل کو مکمل کرنے کے لئے اگر تختیوں کے درمیان فاصلہ ۲ ہو تو لا = لاک
جواب میں ع کی قیمت اس مساوات سے حاصل ہوگی

$$\text{جب} \quad \text{ع} = \text{ی} = \text{فہ} (\text{سم} + \text{سم}) + \frac{3}{\text{م}}$$

$$\text{اور چونکہ} \quad \text{فہ} (\text{سم} + \text{سم}) = \text{ع} + \frac{(\text{ع} - 2\text{ع})(\text{ع} - 2\text{ع})}{\text{فہ} - \text{ع}}$$

$$\text{جب} \quad \text{ع} = 1 + \frac{2(1 - \text{م})}{\text{فہ} - \text{ع} + 1 + \frac{3}{\text{م}}}$$

لے طا = ع (Weierstrass' Zetafunction)

رکو جم ذ = ی اور م س / ک = ۶

$$\frac{\text{فری} - \text{فری}}{\{(1-1)(1-1)\}} = 2 \text{ فری}$$

ی = ۳ + م / م کے اندراج سے یہ ہو جاتا ہے

$$\frac{\text{فری} - \text{فری}}{\{(1-1)(1-1)(1-1)\}} = 2 \text{ فری}$$

$$\frac{\text{فری} - \text{فری}}{\{(1-1)(1-1)(1-1)\}} = 2 \text{ فری}$$

جہاں ع = ۲، م = ۲، ع = ۱، م = ۱، ع = ۱، م = ۱

نہیں ع < ع < ع

پس د = فہ (۶ + صہ) جہاں صہ مستقل ہے۔

(۱۰۵) اب ی یا جم ذ، ا اور جب ع کے درمیان واقع ہوتا ہے جہاں ع وقت شعری کا (ادبیہ ہے)۔

$$\frac{\text{فری} - \text{فری}}{\{(1-1)(1-1)\}} = 2 \text{ فری}$$

$$\frac{\text{فری} - \text{فری}}{\{(1-1)(1-1)\}} = 2 \text{ فری}$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ چونکہ فہ (۶ + صہ) ع، اور ع کے درمیان واقع ہوتا ہے اس لئے صہ کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور صہ ہونا چاہیئے۔ نیز د = ع، جیکہ ذ = ی، ا اور اگر ہم ص کو اسے نہیں تو غ = ۰ جبکہ ذ = ۰ اور اس لئے لازماً

اس صورت میں محور و ما کو تختوں کے درمیانی فاصلے کے وسط میں اور مبداء و کو مانع کی قدرتی سطح میں لینا اور انصراف ذ کو ا پر کے ماس سے ناپنا سہولت پیدا کرے گا۔ (۱۶۴)

گذشتہ صورت کی طرح

$$ر م = \frac{ک}{م}$$

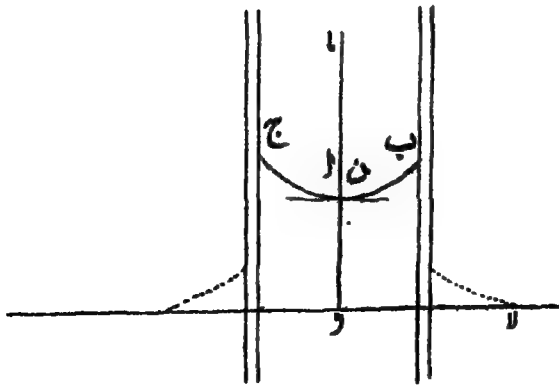
اور $\frac{فر م}{فر لا} = ۱ + \left(\frac{فر م}{فر لا} \right)^۲ = \frac{۲}{۳}$ اس لئے حاصل ہوگا

$$\frac{۲}{۳} = م - ۱ + \left(\frac{فر م}{فر لا} \right)^۲ = م - ۱ + \frac{۲}{۳} = م$$

اس طرح م - جم ذ مثبت ہونا چاہیئے اور اس لئے $م < ۱$

نیز $\frac{فر م}{فر ذ} = \frac{ک}{م}$

$$\frac{۲}{۳} = \frac{فر م}{فر ذ} = \frac{ک}{م} = \frac{۱}{م - جم ذ}$$



دیکھنا:

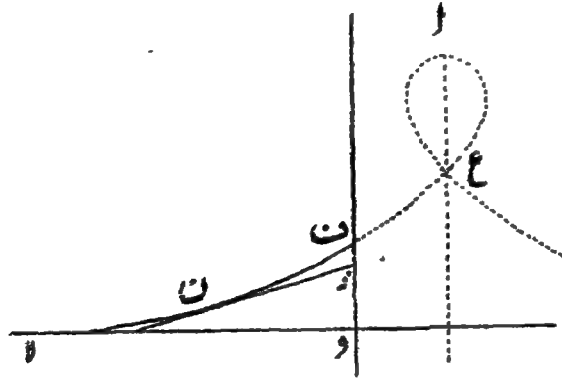
$$۱۔ \frac{ک}{۲} = جب ف، \frac{فرس}{فرخ} = \frac{ک}{جب (\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴})}$$

$$اور \frac{س}{ک} = \frac{س}{ک} = \frac{س (\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴})}{س (\frac{\pi}{۴} - \frac{\pi}{۴})}$$

اگر قوس ۱ اور انفراف مسا کو با ترتیب ۱ اور ۱ پر کے ماس سے
ناچیں تو

$$جب ۱، ف = \frac{\pi}{۴}، س = ف$$

$$اور جب ۱، ف = س، \frac{\pi}{۴}، س = (ف - ۱)$$



اور حاصل ہوتا ہے

$$\frac{س}{ک} = \frac{س}{ک} = \frac{س (\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴})}{س (\frac{\pi}{۴} + \frac{\pi}{۴})}$$

جو دفعہ (۱۳۵) میں حاصل کی ہوئی مساوات ہے۔

۱۷۔ متوازی تختیاں۔ ایک ہی شے سے بنی ہوئی دو متوازی تختیوں کے

درمیان مانع کی سطح کی شکل جب تختیاں مانع میں جزو غرق ہوں۔

$$\frac{\text{فرلا} - \frac{1}{2} \text{ک}}{\text{فرلا} - \frac{1}{2} \text{ک}} = \frac{1}{2} \text{ک}$$

اس مساوات کے مکمل سے اور مبداء کو ایک نئے مقام پر لینے سے اس طرح
پہرکلا۔۔۔ جبکہ ما = ک، حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{لا} + \text{ما} - \frac{1}{2} \text{ک}}{\text{ک}} = \frac{\text{ک} + \text{ما} - \frac{1}{2} \text{ک}}{\text{ک}}$$

$$\frac{\text{لا} + \text{ما} - \frac{1}{2} \text{ک}}{\text{ک}} = \text{قطر} \quad [\text{Sech.}]$$

اگر ما = لا، لائقا ہی ہوتا ہے اور وقفہ (۱۳۵) کی شکل لینے سے لدنیہ
شعاری منحنی کے ماثل ہو جاتا ہے جبکہ ب ج، ب اور ج پر ماس ہو لیکن یہ
اُسی صورت میں ممکن ہے جبکہ طول بہت بڑا ہوا۔

اگر عمہ دو زاویہ ہو جس پر مانع دیوار سے ملتا ہے تو ہم $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}}$ کی بجائے
معمہ رکھنے سے ارتفاع وقف حاصل کر سکتے ہیں اس طرح

$$\frac{\text{ک}}{\text{ک}} = \text{معمہ}$$

اور وقف = ک جب (پہ - عمہ)

ایسے مانع کی صورت میں جس کے لئے زاویہ تماس منفرج ہو (مثلاً
پارہ) یہ بہتر ہو گا کہ ما کو نیچے وارنا پاجاے۔

۱۶۹۔ ذاتی مساوات حاصل کرنے کے لئے قوس کو ف سے ناپو اور
انصراف ذ کو ف سے۔ تو

$$\frac{\text{ک}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرلا}} = \text{رجمہ}$$

اگر انتصابی دیوار و ف ہوا مائے کی قدرتی سطح و اس میں سے گزرنے والی دیوار کے عمود و ارتعاش کا نصف قطر المختار اور سطحی تناؤ ت ہو تو دفعہ (۱۴۴) کی مساوات (۱) سے

$$\frac{t}{r} = \pi - \delta = \text{ج ث م ا}$$

پس م ت = ج ث ک ۲ رکھنے سے

$$\frac{r}{k} = \text{م ا}$$

اور دفعہ (۱۳۵) کی شکل کو اٹا دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ شعاری منحنی لدنیہ کی ایک خاص صورت ہے۔

یہ خاص صورت اس لئے ہے کہ و منحنی کا ماس ہے، پس فر/فرلا = جیکہ م = .

اور اس طرح کارٹیزی مساوات حاصل ہو سکتی ہے شکل سے ظاہر ہے کہ فر/فرلا جو ناویہ (۱۴۲)

۲/۳ + ذکا ماس ہے متقی ہے اور تعدا و ا گھٹتا ہے اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ فر/فرلا مثبت ہے اور مساوات م ر م ک = ہو جاتی ہے

$$\frac{r}{k} = \left[1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}}$$

فر/فرلا کی بجائے ع فر/فرلا رکھ کر مکمل کرنے سے [ع = فر/فرلا]

$$\frac{1}{6(1+2)} = \frac{r}{k} - 1, \text{ اور } \frac{r}{k} \pm \frac{r}{r_0} = \frac{r}{k} - 1$$

اب چونکہ ماس انتصابی ہوتا ہے جبکہ م م ک = اور چونکہ منحنی، انتصابی مستوی کو حادہ زاویہ پر پڑتا ہے اس لئے تمام نقاط زیر بحث پر م م ک سے کم ہوگا اور

اس صورت میں مانع کے ستون کو وہ تناؤ تھا میگا جوسٹوں کے اوپر کے
حدود کے گرد ہے اور اس لئے اگر اندرونی نصف قطر ہو تو

$$۲۲ رت جم ع = ج ث ۲ ژ ف$$

$$۲ ث جم ع = ج ث ر ف$$

یا

اس طور پر تھے ہوئے ستون کے کسی نقطہ پر کا دباؤ چونکہ کرہ ہوائی
کے دباؤ سے کم ہو گا اس لئے اگر ستون کافی طور پر بلند ہو تو یہ دباؤ تناؤ کی
حالت میں ضم ہو جائے گا مگر پھر بھی سیالی دباؤ کے اس کلیہ کی پابندی
کرے گا کہ ہر سمت میں دباؤ مساوی ہوتا ہے۔

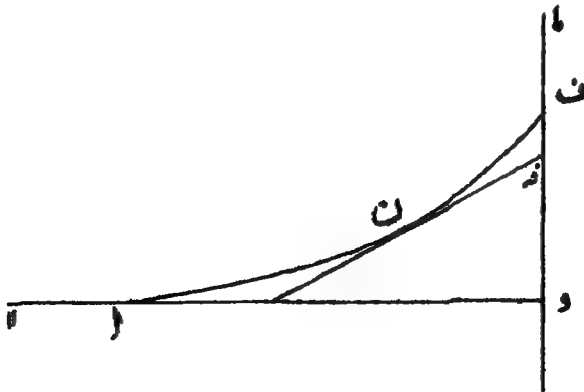
(۱۷۱)

یہ مشاہدہ طلب ہے کہ توانائی بالقوہ جوسٹوں کے صعود کی وجہ سے پیدا ہوتی
ہے نصف قطر پر منحصر نہیں ہوتی۔

۱۶۸۔ شعاری مخنی۔ شعاری مخنی وہ شکل ہے جہاں انتصابی دیوار کے ساتھ

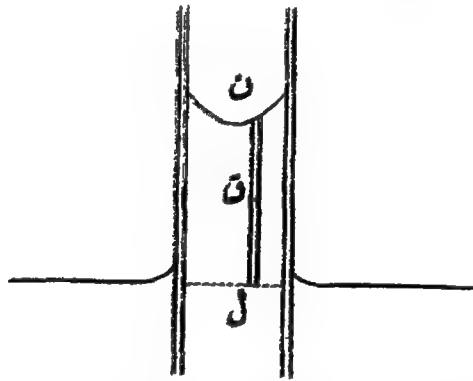
تماس میں اختیار کرتا ہے۔

ہم ایسی صورت پر غور کریں گے جس میں مانع اور دیوار کا زاویہ تماس حادثہ
ہو مثلاً جب پانی شیشے کی ایک انتصابی تختی کے ساتھ تماس رکھتا ہے۔



ان کلیوں کو ان کریم قوت شعری اور مانع جھیلوں سے متعلق مختلف مظاہر کی ترجیح کر سکتے ہیں۔

۱۶۴۔ دو تختیوں کے درمیان مانع کا چڑھاؤ۔
اگر سطحی تناؤات ہو اور مستطیل زاویہ عمود ہو جس پر مانع کی سطح برعکس سے ملتی ہے اور جس کو ہم قوت شعری کا زاویہ کہیں گے اور اوسط چڑھاؤات اور تختیوں کا درمیانی فاصلہ د ہو تو، اکائی عرض کے مانع کے توازن پر غور کرنے سے
۲ جمعم = ج ث ف د
پس تختیوں کے درمیانی فاصلے کو گھٹانے سے مانع کا چڑھاؤ بڑھتا ہے۔



یہ مشاہدہ طلب ہے کہ کسی نقطہ ق پر کا دباؤ ایل پر کے دباؤ سے بعد
ج ث × ق ل کے کم ہے

اور $\pi = ج ث \times ق ل$

اب چونکہ ن پر کرہ ہوائی کا دباؤ بیرونی سطح آب پر کے دباؤ کے تقابلاً مساوی ہے اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ عنصر ن ل کے وزن کو اس کے اوپر کے حدود کے سطحی تناؤوں کا حاصل قلم ہے ہوئے ہے۔

۱۶۵۔ دائری نلی میں مانع کا چڑھاؤ۔

ج ثا کر (ص + ص - س) + (ب + ص - س) + ج ص =
یا کر (ج + ص - س) + (ب + ص - س) + ج ص =
اس شرط کے تحت کہ

کر ص فرس =

اور چونکہ ص لہ اختیاری ہے، اس سے مساوات (۱) حسب سابق حاصل ہوگی اور نیز

(ج + ب - ج) = ۰ " " " (۲)

حاصل ہوگا جس کا یہ مطلب ہے کہ مانع اور ظرف کی سطحوں کا درمیانی زاویہ ان کے
خط تقاطع پر مستقل رہتا ہے۔

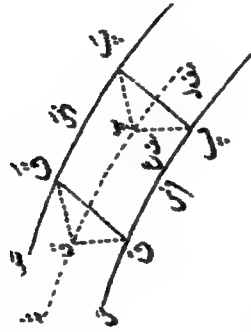
۱۶۵۔ متذکرہ بالا باتوں پر غور کرنے سے نیز تجربوں کے نتیجوں کی بناء پر دو کلیوں
پر پہنچتے ہیں جن کو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے۔

(۱) اس محدود کرنے والی سطح پر (جو مانع اور ہوا کو جدا کرتی ہے) یا دو مانعات
کے درمیان کی سطح فاصلہ پر سطحی تناؤ ہوتا ہے جو ہر نقطہ پر اور ہر سمت میں وہی ہوتا ہے
(۲) گیس اور مانع کی سطح فاصلہ یا دو مانعات کی سطح فاصلہ پر سطحی تناؤ ہوتا ہے جس
خط پر ملتی ہے اس خط اتصال پر اس سطح اور جسم کی سطح کے درمیان ایک خاص زاویہ
بنے گا جو مخصوص اور مانعات کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔

(۱۸) پانی اگر شیشے کے برتن میں ہو تو یہ زاویہ حادثہ ہوتا ہے۔ پارہ کی صورت
میں یہ زاویہ منفرد ہوتا ہے۔

لہ شکل میں جو مانع اور ظرف کا خط تماس ہے اس کا عنصر فرس مانع ہے اور خط تماس کے
متناظر عنصر فرس مانع کی سطح ص کا عنصر فرس مانع کی سطح ص کا عنصر فرس مانع کی سطح ص کا عنصر
خط تماس کے اطراف فائدہ مانع فرس مانع کی سطح ص کا عنصر فرس مانع کی سطح ص کا عنصر
کی صغیر مقدار ہے اور اس لئے نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

جہاں کرہ ہوائی کا دباؤ Δ اور مائع کی سطح کے عین اندر کا دباؤ d ہے اس سے معلوم ہوا کہ اثر وہی ہے گویا کہ سطح تناؤ کی حالت میں ہے اس طور پر کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ مستقل اور توانائی فی اکائی رقبہ کے مساوی ہے۔



ہے۔ اگر ہم خط s کے تمام نقطوں پر سطح s کے عماد کھینچیں تو یہ عماد سطح s کو خط fr پر قطع کرینگے اور سطح s دو حصوں پر مشتمل خیال کیجا اسکے کی:- ایک $ص$ جو خط fr سے محدود ہے اور دوسرا $ص$ جو خط fr اور s کے درمیان ہے۔

گذشتہ کی طرح ہمیں حاصل ہوگا

$$ص - س = کر (\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}) \text{ مف لہ فرس}$$

اور اگر مف لہ سے عناصر فرس، فرس کا درمیانی فاصلہ تعبیر ہو تو $ص$ کو سطح s پر ظرف کی سطح کے عناصر مف لہ فرس کا ظل تصور کیا جاسکتا ہے پس اگر سطح s اور سطح $ص$ کے عمادوں کا درمیانی زاویہ θ ہو تو

$$ص = کر \text{ مف لہ فرس}$$

$$\text{نیز } مف س = - \text{مف س} = کر \text{ مف لہ فرس}$$

اب چونکہ توانائی بالقوہ ساکن ہے اس لئے

$$\text{مف } \{ \text{ج ث کرری فر لا فری} + \text{اس} + \text{باس} + \text{ج س} \} = 0$$

اس شرط کے تحت کہ کیت مستقل ہے۔ یا

یہ توانائی بانٹوہ چار حصوں پر مشتمل ہوگی یعنی نقلی توانائی ج تا کر کے فرما فرما فری
جہاں عنصر فرما فرما فری کا ارتقاع می ہے ، اور فاصل سطحوں کی توانائیاں جو (ع)
مانع اور ہوا (ب) مانع اور طرف (ج) ہوا اور طرف کو جدا کرتی ہیں۔
پس یہ ضروری ہے کہ

ج تا کر کے فرما فرما فری + اس + ب س + ج س
ساکن ہو جہاں س ، س ، س سے بالترتیب سطحیں (ع) (ب) (ج) اور (ب)
ج سے ان کی توانائیاں فی اکائی رتبہ تغیر ہوتی ہیں ، اس شرط کے تابع کہ
جسم کر کے فرما فرما فری مستقل رہتا ہے۔

مانع اور ہوا کی درمیانی سطح فاصل س کے خفیف ہٹاؤ کی صورت میں اگر سطح
س کے عماد کے عنصر کو مع تغیر کرے جو س کے قدیم اور جدید محلوں میں
اس کے متناظر عناصر کے درمیان واقع ہے تو پہلی رقم کا تغیر صریح تا کر کے مع فرس
ہوگا۔

اولاً فرض کرو کہ مانع جس خط پر طرف کو مس کرتا ہے وہ نہیں بدلتا اس صورت
میں س اور س مستقل رہیں گے اور س بدلتا ہو جائے گا۔ س کے
ایک ایسے عنصر فرس ، فرس پر غور کرو جو خطوط انحناسے محدود ہے۔ اس عنصر کے

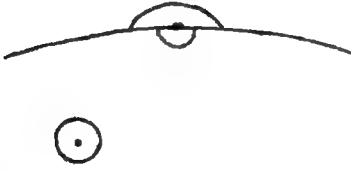
لے یہ ممکن ہے کہ مانع کی کثافت سطح کے لائنہ نزدیک سالمی عمل کی وجہ سے بدلتی ہو لیکن چونکہ
تغیر کثافت کی نہ کی مولاٹی بمقابلہ مع کے لائنہ چھوٹی ہوگی اس لئے استدلال کو متاثر
کئے بغیر اس تغیر کو نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔

سالمہ کی قوت کے عمل کا میدان لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔ اور چونکہ یہ سالمی قوتیں بہت چھوٹے چھوٹے فاصلوں پر عمل کرتی ہیں، اس لئے جہاں تک کہ سالمی قوتوں کا تعلق ہے متجانس جسم کا ہر عنصر بشرطیکہ وہ جسم کو محدود کرنے والی سطح کے نزدیک نہ ہو ایک ہی قسم کے حالات کے تحت ہوگا۔ لیکن خود سطح پر کسی خاص سالمہ کا کرہ عمل نامکمل ہوگا اور یہ سالمہ محدود کرنے والی سطح کے بیرونی جانب جس قسم کے مادہ کے سالمات ہوں ان کے میدان عمل میں آ جائیگا۔

یہ اگر ہم یہ مان لیں کہ میدان عمل کے خطی ابعاد بمقابلہ سطح کے نصف قطر

اختلاف کے لا انتہا چھوٹے ہیں تو جہاں تک سالمی قوتوں کا تعلق ہے دو متجانس اشیاء کی سطح فاصل کے تمام حصے ایک ہی قسم کے حالات کے تحت ہونگے۔ سطحی توانائی بالعتوہ

(۱۶۷)



جو سالمی قوتوں کے باعث پیدا ہوگی وہ سطح کے رقبہ کے ساتھ ایک مستقل نسبت رکھیں گی یہ مستقل تناسب رکھنے والی اشیاء کی نوعیت پر منحصر ہوگا۔

۴۶۱۔ ایک متجانس مادہ ایک طرف میں جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے اس صورت پر اصول توانائی کا استعمال ہے۔

توازن کی صورت میں توانائی بالعتوہ کی قیمت ساکن یا اچل ہونی چاہیئے۔

۴۶۲۔ وہ میدان جس میں شعری قوتیں عمل کرتی ہیں لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے (Quincke) نے ایک شیشے کی نلی میں جس پر چاندی کا ۵۴۲۰۰۰ وولی میٹر (مٹالیپ تھا پانی ڈالکر تجربہ کیا وہ پھر اسی قطر کی چاندی کی نلی میں پانی ڈالکر تجربہ کیا۔ ہر صورت میں ایک ہی قسم کے مظاہر مشاہدے میں آئے

Pogg Ann. CXXXIX (1870). p. 1.

Mathieu, Théorie de la capillarité, 1888.

۴۶۳۔ قوت شعری کے نظریہ کی بربکث سے لی گئی ہے۔

(۱۶۶)

باب

قوت شعری

۱۶۳۔ یہ ایک مشہور بات ہے کہ اگر چھوٹے سوراخ کی ایک شیشہ کی تلی پانی میں ڈبو دی جائے تو تلی کے اندر پانی کی سطح بیرونی پانی کی سطح سے اونچی ہو جاتی ہے۔

یہ بات بھی اتنی ہی مشہور ہے کہ اگر تلی پارہ میں ڈبو دی جائے تو اندرونی پارہ کی سطح بیرونی پارہ کی سطح سے نیچی ہوگی۔ اگر شیشہ کے آبخورے میں پانی ہو تو اس کو دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ خط تماس پر مانع کی سطح کا انحنا اوپر وار ہے اور یہ شیشہ کو ایک خاص نماد یہ پر چمپی ہوئی نظر آتی ہے۔

اگر آبخورے کو احتیاط سے پورا بھر دیا جائے تو پانی کی سطح آبخورے کی چوٹی یا سر کے مستوی کے اوپر تک چڑھ جائے گی اور پانی سرے کے گول کنارے کے اوپر ابھرا ہوا دکھائی دیکے گا۔

اگر میز پر پانی گر جائے تو اس کے حدود معین ہوتے ہیں اور منحنی کنارے میز سے چمٹے ہوئے ہوتے ہیں۔

ان واقعات اور ان کے مثل دوسرے اور بہت سے واقعات کی توجیہ ان قوتوں کے وجود سے ہوتی ہے جو سیالوں کے خود سالمات کے درمیان اور نیز ٹھوس اور سیالوں کے سالمات کے درمیان عمل کرتی ہیں جبکہ ٹھوس اور سیال ایک دوسرے سے تماس رکھتے ہوں۔ کسی خاص

س = مک مس ذ ہے۔ اس پترے کے مقعر حصہ پر ہوا کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر د کے زیادہ ہے اور پتر زنجیرہ کے محور کے متوازی دو مساوی قوتوں سے تھا گیا ہے۔ یہ قوتیں اس سے زاوی فاصلہ پر عمل کرتی ہیں۔ ثابت کرو کہ

$$\frac{ت}{دک} = \text{جم ذ قطع} - ۱ + \text{جب ذ لوک مس} \left(\frac{ف}{پ} + \frac{ن}{پ} \right)$$

$$\frac{ل}{دک} = \text{جب ذ قطع} - \text{مس ذ} - \text{جم ذ لوک مس} \left(\frac{ف}{پ} + \frac{ن}{پ} \right)$$

$$\frac{گ}{دک} = \text{قط ذ قطع} - \frac{۱}{۲} \text{قط}^۲ - \frac{۱}{۲} \left\{ \text{لوک مس} \left(\frac{ف}{پ} + \frac{ن}{پ} \right) \right\} + \text{ک}$$

$$\text{جہاں ک} = \frac{۱}{۲} \left\{ \text{لوک مس} \left(\frac{ع}{پ} + \frac{ن}{پ} \right) \right\} - \frac{۱}{۲} \text{قط}^۲$$

نیز ثابت کرو کہ تھانے والی ہر قوت

$$= \text{دک لوک مس} \left(\frac{ع}{پ} + \frac{ن}{پ} \right)$$

۵۔ ایک مستوی لچکدار پتر دو متوازی افقی ڈنڈوں پر ٹکا ہوا ہے اوپر کی ہوا کے مستقل دباؤ سے اس کو ڈنڈوں کے درمیان نیچے کی طرف موڑا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ نصف قطر انحناء اور انحراف مساوات

$$\left(\frac{فر}{فرذ} \right)^۲ = ک - \frac{۲}{۴} - \frac{۲}{ع} د$$

سے مربوط ہونگے۔

۶۔ دباؤ کا کلیہ معلوم کرو جو اس پترے کو زنجیرہ کی شکل میں جھکا دے۔

۷۔ اگر اسی پترے کو ایک مکافی اسطوانے کی شکل میں جھکا دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس سے زاوی انحراف ذہ پر سیالی دباؤ ایسے بدلتا ہے جیسے

$$\text{جم ذ} (ع، جم ذ - ۶)$$

اور ج پر گ =۔ اور ہر سرے پر کا دور ماسی اور عمادی اجزاء ترکیبی پر مشتمل ہوگا۔ اب اگر ہم اس خاص لدنیہ کے مولوں کثافت کا مانع اندہ ملتے جانیں تو اس کی شباہت غیر متغیر رہے گی لیکن ب اور ج پر ت کی قیمت بڑھ جائیگی اور ل غیر متغیر رہے گا۔

امثلہ

(۱۶۵)

۱۔ پتلے استوار مادہ سے بنا ہوا ایک ظرف جو مستند یا سطوانہ کے نصف حصہ کی شکل کا ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے اور انتہائی قوتوں سے جو اس کو محدود کرنے والے افقی کمروں پر عمل کرتی ہیں تھما گیا ہے ثابت کر دے کہ زیر ترین نقطہ سے فاصلہ پر کے نقطہ پر زور ہونے

ایسے کہ ۲ ت - ج ف ۱ (ف جب ف + جم ف) ۲ ل =۔ ج ت ۱ ف جم ف

۲ گ = ج ت ۱ (ف جب ف - جم ف)

۲۔ ایک پتلا استوار مکانی اسطوانہ کی شکل کا ہے جو کمروں پر علی القوائم سطحوں سے محدود ہے۔ اس کو ایک ظرف کی طرح استعمال کیا گیا ہے اور مہین کپڑے کی ایک پٹی سے جو در خاص کے سروں میں سے گزرنے والے کمروں کو ملائی ہے اس کو بند کر کے اس میں ہوا بھر دی گئی ہے جس کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر ۵ کے زیادہ ہے۔ اگر پٹی کے عرض کو در خاص (م) کے ساتھ نسبت ۴ : ۲ : ۴ ہو تو اس پر کے ماس سے فاصلہ ثابت کر دے کہ

ت = ۵ ل (قطاف - ۲ جم ف) ل اور گ کی قیمتیں معلوم کر دے اور ثابت کر دے کہ اس

۲ گ = ۵ ل (۳ + ۲ جم ف)

۳۔ ایک استوار اسطوانہ کی اندرونی ہوا کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے زیادہ ہے۔ ان کی عمودی تراش دو تند ویری خطوط کی قوسوں سے بنی ہے جن کے سرے ایک دوسرے پر ٹھیک بیٹھے ہیں کسی کون پر کے زور دریافت کر دے۔

۴۔ ایک استوار مہین پتلا اسطوانہ کی شکل کا ہے جس کی عمودی تراش زنجیر

اور اس لئے مطلوبہ دباؤ، مث کثافت کے مائع کو ڈالنے سے حاصل ہو سکتا ہے

ایسا کہ $\text{عجم} = \text{رج ث م}^2$

پس ثوبیہ کی شکل مساوات بالا سے حاصل شدہ کثافت کے مائع کو سلاخوں کی ہموار سطح تک ڈالنے سے برقرار رکھی جاسکتی ہے۔

مزید برآں $\text{ل} = \frac{\text{ع}}{\text{رج}} \times \text{فرز} = \frac{\text{ع}}{\text{م}^2} \times \text{جب ف}$

ل = رج ث م^۲ × جب ف قطعہ
جہاں بائیں طرف کے حصہ کی دائیں طرف کے حصہ پر جزی قوت لی
ہے جو نقطہ ن پر اند کی طرف عمل کرتی ہے۔ اس طرح ل بائیں طرف کے
حصہ پر کے عمل کو تعبیر کرتا ہے۔
اس لئے ب اور ج یہ

ل = رج ث م^۲ مس ع

اس آخری نتیجہ کی جانچ اس امر کے معائنہ سے ہو سکتی ہے کہ سلاخوں کے تعامل ملنے کے وزن کو تھانتے ہیں۔

اس طرح

۲۔ ل جم ع = ۲ رج ث ن ل فر

۲ رج ث ن ل × ل × فرس فرس فرس فرس

۲ رج ث م^۲ جم فرس فرس = ۲ رج ث م^۲ جب ع

۱۶۲۔ اگر ایک دئے ہوئے پتھرے کو موڑنے سے لدنیہ حاصل کیا جائے اور سرے پر گئے کوئوں کو ایک ہی افقی مستوی میں ثابت کر دیا جائے تو ب

ت = ق جم ذ، ل = ق جب ذ

۱۶۱۔ ایک پتلا لچکدار پتلا دو متوازی ثابت سلاخوں پر رکھا ہوا ہے۔ اس پر دباؤ ڈالکر اس کو ثوبیہ کی شکل میں تبدیل کرنا مقصود ہے۔ دباؤ کا قانون معلوم کرو۔
مقادیر ت، ق اور ل۔ دونوں ان خطوں پر صفر ہو جائے ہیں جسلاخوں کو مس کرتے ہیں۔ اور اس لئے ان خطوں پر نصف قطر انحراف لائن ہوں گے۔
پس مساوات

$$ت = ک - \frac{ع}{r^2}$$

میں ہم دیکھتے ہیں کہ ک = . اور اس لئے

$$ت = - \frac{ع}{r^2}$$

ثوبیہ کی ذاتی مساوات ہے

$$r = 2m = m (جم ذ - جم ع) \frac{1}{r^2}$$

اور دباؤ و مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$در = \frac{ع}{r^2} فر ذ - \frac{ع}{r^2} (فر ذ) - \frac{ع}{r^2}$$

(۱۶۲) عمل اندراج سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$در = \frac{ع جم ع}{m}$$

اب ثوبیہ میں دفعہ (۱۳۳)

$$r = \frac{m}{ن ل}$$

$$د = ن ل \times \frac{ع جم ع}{m}$$

اس طرح

$$ت = \frac{د \cdot ب}{ج \cdot د} \text{ اور } ل = \frac{د \cdot (ب' - ب)}{ب' \cdot ب} \text{ ج جب } ف \cdot جم \cdot ف$$

$$\text{نیر} \quad \frac{فرگ}{فرق} = \frac{ل}{ر} = \frac{د \cdot (ب' - ب)}{(ب' \cdot ب + ب' \cdot جم \cdot ف)} \quad (ب' \cdot ب + ب' \cdot جم \cdot ف)$$

$$گ = \frac{۱}{۲} = \frac{د}{(ب' \cdot ب + ب' \cdot جم \cdot ف)} \quad (ب' \cdot ب + ب' \cdot جم \cdot ف)$$

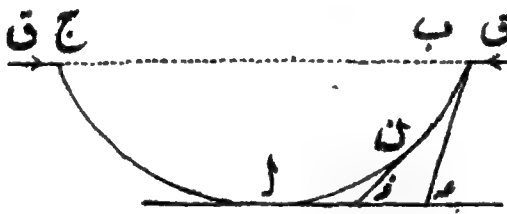
$$\frac{۱}{۲} = \frac{د}{(ج \cdot د' + مستقل)}$$

$$\text{اس طرح} \quad گ - گ = \frac{۱}{۲} = \frac{د}{(ج \cdot د' - ج \cdot د)}$$

۱۶۰۔ ثوبیہ۔

(۱۶۳)

سم کے دفعہ (۱۳۴) میں یہ بتا دیا ہے کہ ثوبیہ اور لدنیہ متماثلتا وہی مسخنی ہیں۔
اگر ایک پتلی بھکڑار مسخنی کے مقابل کے کناروں کو ایک دوسرے کی طرف
کھینچ کر ایک چست یا تنی ہوئی چادر کے ذریعہ ملا دیا جائے تو مسخنی پیدا شدہ دفعہ
(۱۳۳) کا ثوبیہ ہو گا۔



اس صورت میں د = ۰ اور مشق کے طور پر یہ دیکھ لینا مفید ہو گا کہ دفعہ (۱۵۴)
کی مساوات کے تکمیل سے ثوبیہ کی ذاتی مساوات حاصل ہوتی ہے۔
اگر ملا نے والی چادر کا تناؤ ق ہو اور ن پر کا تناؤ اور جزئی قوت
علی الترتیب ت اور ل ہوں تو پتھرے کے حصہ ن ب کے توازن پر
غور کرنے سے یہ مساواتیں حاصل ہوتی ہیں

اس مساوات کی صداقت اس مفروضہ پر مبنی ہے کہ اوسط ایشیہ کا طول کمونوں کے علی انقوائم غیر متغیر رہتا ہے۔ ہم نے یہ بھی مان لیا ہے کہ بیرونی سیالی دباؤ کے وجود سے مساوات پر کسی قسم کا اثر نہیں ہوتا۔

۱۵۹۔ ناقصی اسطوانہ۔ ان مساواتوں کے استعمال کی توضیح کے لئے

ہم ناقصی اسطوانہ کی صورت پر غور کرتے ہیں جو کسی پتلی استوار شے سے بنا ہوائے سروں پر بند ہے اور ہوا سے بھرا ہوا ہے جس کا دباؤ بیرونی ہوا کے دباؤ سے بقدر د کے زیادہ ہے۔

لی کو سا قضا کرنے سے حاصل ہوگا

$$\frac{F_2}{F_1} + T = D$$

مزدوج محور کے ایک سرے سے س اور ذ کو ناپنے سے

$$R = \frac{J_D}{J_B} - \frac{(J_B + J_D)}{J_B}$$

اور مبدوں کو بدلنے کے طریقہ سے یہ معلوم ہوگا کہ

$$T = D + (J_B + J_D) + (J_B + J_D)$$

$$L = (J_B - J_D) - (J_B + J_D) + (J_B + J_D)$$

تشاکل کی رو سے اور نیز عمل و رد عمل کے مساوی ہونے کے کلیہ کو استعمال کرنے سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ اوپین (Apes) پر لی صفر ہو جاتا ہے یعنی جبکہ $F = 0$ اور جبکہ $F = \frac{11}{4}$ پس یہ معلوم ہوگا کہ $1 = 0$ اور $B = 0$ اور اس لئے

جہاں نقطہ ن پر کا نصف قطر انحناء ہے۔
اس صورت میں تیسری مساوات ہو جائیگی

$$ل ر = \frac{ع}{ر} - \frac{ع}{فرقہ}$$

اور اس لئے پہلی مساوات سے

$$فرقہ = \frac{ع}{ر} - \frac{ع}{فرقہ}$$

اس طرح

ت = ک - $\frac{ع}{ر}$ جہاں ک مستقل ہے۔

دوسری مساوات میں ان قیمتوں کو مندرج کرنے سے

$$\frac{ع}{ر} - \frac{ع}{فرقہ} = \frac{ع}{ر} - \left(\frac{ع}{فرقہ} + ک \right) - \frac{ع}{ر} = در$$

اس مساوات سے پتیرے کی اختیار کردہ شکل کا تعین ہو جائے گا
جبکہ دباؤ کا قانون دیا گیا ہو اور یا دباؤ کا قانون معلوم ہو جائے گا جبکہ اختیار کردہ
شکل دی گئی ہو۔

ایسی صورت میں جبکہ مستقل ہو یا ر کا ایک دیا ہو اتفاعل ہو تو

$\left(\frac{فرقہ}{ر} \right) = ی$ رکھنے مساوات بالا کا پہلا مکمل حاصل ہو سکتا ہے اور اس طرح ہم

$\frac{فرقہ}{ر}$ کو ر کی رقوم میں معلوم کر لیتے ہیں۔

۱۵۸ — اگر قدرتنا پتیرا دی ہوئی اسطوائی شکل کا ہو اور اس کو قدرتی شکل سے
جھکایا جائے تو جنت ک جو چکاؤ کا جنت ہے انحناء کے تغیر کے متناسب

(۱۶۲)

ہوگا۔ اس طرح اگر $\frac{ع}{ر}$ پر صدری نصف قطر انحناء ہو تو

$$ک = ع \left(\frac{۱}{ر} - \frac{۱}{فرقہ} \right)$$

نقطہ ق پر کے اعمال ت + م ف ت ، ل + م ف ل ، گ + م ف گ ہیں۔
فرض کرو کہ ت ق پر مقرر جانب سیالی دباؤ د م ف س ہے اور
فرض کرو کہ نقطہ ل پر کے ماس سے نقطہ ت پر کے ماس کا انصراف ف ہے
تب نقطہ ت پر کے ماس اور عماد کے متوازی قوتوں کو تحصیل کرنے سے
اور معیاروں کو ت کے گرد لینے سے ہمیں یہ مساواتیں حاصل ہونگی

$$\text{مف ت} + (\text{ل} + \text{مف ل}) \text{مف ف} + \text{د م ف س} = \frac{\text{مف ف}}{۲} \quad ،$$

$$\text{مف ل} - (\text{ت} + \text{مف ت}) \text{مف ف} + \text{د م ف س} = ۰ \quad ،$$

$$\text{مف گ} - (\text{ل} + \text{مف ل}) \text{مف س} + (\text{ت} + \text{مف ت}) \frac{\text{مف س}}{۲} = \frac{\text{مف س}}{۲} \text{مف ف}$$

$$- \text{د م ف س} = \frac{\text{مف س}}{۲} \quad ۰$$

(۱۶۱)

یا، انتہا میں

$$\frac{\text{فرت}}{\text{فرف}} + \text{ل} = ۰ \quad ،$$

$$\frac{\text{فل}}{\text{فرف}} - \text{ت} + \text{د} \frac{\text{فرف}}{\text{فرف}} = ۰ \quad ،$$

$$\frac{\text{فرگ}}{\text{فرف}} - \text{ل} = \frac{\text{فرف}}{\text{فرف}} \quad ۰$$

اگر پترے کی شکل دی گئی ہو یعنی اگر سختی ل کے ذاتی مساوات دی گئی
ہو اور اگر د ، ف کا معلومہ تفاعل ہو تو ان مساواتوں سے کسی کون کے ساتھ
ساتھ عمل کرنے والے دور کا تعین ہو سکتا ہے۔

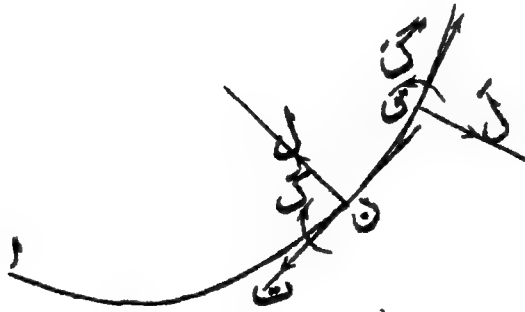
۱۵۔ مستوی پترا۔ اگر پترا لچکدار ہو اور قدرتا مستوی ہو تو ہمیں ایک راہ
شرط حاصل ہوگی اور وہ یہ کہ گ انخا کے متناسب ہوگا یعنی گ = ع / ر

باب

(۱۶)

استوار یا کچھار پترا سیالی دباؤ کے زیر عمل

۱۵۶۔ اب ہم اسطوائی پترے کی صورت پر غور کرتے ہیں جو سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے اس طرح کہ کسی کون کے ہر نقطہ پر یہ دباؤ وہی ہے۔
اگر کونوں کے علی القوائم ایک عمودی تراش (نقشہ) لی جائے تو
ان میں سے گزرنے والے اور کاغذ کی سطح پر عمود وار کون سے جو دو حصے
جدا ہونگے ان کے درمیان کا زور ایک ماسی قوت، ایک جزی قوت، اور
ایک جفت پشتل ہوگا۔



کون کا اکائی طول لیکر ہم ان مقداروں کو ت، ل، ہگ سے
تعبیر کریں گے۔ یہ ذہن نشین رہے کہ عنصر ن ق کے نقطہ ن پر عمل کرنے
والے زور ت، ل، ہگ ہیں اور مخالف سمتوں میں عنصر ن ق کے

گیا ہے، پورا نظام ٹھوس جسم کی طرح محور کے گرد یکساں زاویہ رفتار سے گھوم رہا ہے
 اگر مانع پر کوئی بیرونی قوتیں عمل نہ کریں اور محور پر دباؤ صفر ہو تو ثابت کر دو کہ
 کسی نقطہ پر صداری تناؤ کی نسبت ۴ - ۱ : ۱ ہوگی۔



مغنیوں کی سمت میں اور ان کے علی القوائم سمت میں تناؤں کی نسبت ۲: ۷ ہے۔
یہ مان لیا گیا ہے کہ دباؤ محور پر صفر ہو جاتا ہے۔

۲۵۔ ایک کامل طور پر مائع ظرف کی عمودین خطہ دیر کو اپنے محور کے گرد گھمانے سے ہوئی ہے اس کا محور انتصابی ہے۔ اگر ظرف پانی سے تقریباً بھرا ہوا ہو تو ثابت کرو کہ ایسے نقطہ پر کا افقی تناؤ جہاں ماسی مستوی، افقی کے ساتھ ۴۵° کا میلان رکھتا ہے زیر ترین نقطہ پر کے تناؤ کا ۲/۳ (۲۳/۹۶ - ۲۳/۱۲۸) ہے۔ ظرف بالکل

بھرا ہوا کیوں نہ ہونا چاہیے۔

۲۶۔ مانع کے لئے ایک ظرف اس طرح بنایا گیا ہے۔ ایک بے وزن تختی کے ساتھ، کیڑے کا ایک مائع قطر جس کی شکل نیم قطر و کے کرہ کے منطقہ کی ہے لگا دیا گیا ہے اس کیڑے کی ایک مستوی تراش تختی پر ٹھیک آ جاتی ہے اور دوسری کرہ کے مرکز میں قسے گزرتی ہے۔ اس ظرف کو بڑی تراش کی کور سے ختم کر غیر متجانس مانع سے بھر دیا گیا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے $y = (1 - x^2)^{1/2}$ جہاں y گہرائی ہے۔ صدوری تناؤ کی نسبت معلوم کرو۔

۲۷۔ ایک امتداد ناپذیر مائع مفاذ کی شکل گردشی مکانی مٹا (دو خاص m و λ) کی ہے۔ یہ مفاذک نصف قطر کے ایک ثابت افقی دائرہ سے ٹک رہا ہے۔ اس میں مٹا کثافت کا سیال ہے جو مفاذ کے انتصابی محور کے گرد زاویائی رفتار (ج/۲ ب) سے گھوم رہا ہے۔ ثابت کرو کہ مفاذ کے کسی نقطہ پر محور سے

ر فاصلہ پر افقی تناؤ ہوگا

$$\frac{\rho}{2} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right\} \frac{g^2 (2a^2 + a^2) - (2a^2 + a^2)}{2(a^2 + a^2)}$$

۲۸۔ ایک مائع جلی گردشی سطح کی شکل کی ہے نصف النہاری مغنی اس طرح کا ہے کہ کسی نقطہ پر کا عمود نصف قطر اعتدال کا n گنا ہے۔ جلی کو مائع سے عین بھر دیا

کرنے میں کافی ہوں۔ اگر دباؤ مستقل ہو تو ثابت کرو کہ نصف النہاری منحنی ہے

$$لا + ۱ = \int \left(\frac{دباؤ}{۲} + ب \right) \left\{ \left(\frac{دباؤ}{۲} - لا + ج \right) - \left(\frac{دباؤ}{۲} + ب \right) \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

جہاں ابتدائی نصف قطر لا، لچک کا ایک مقیاس لا، اور مکمل کے مستقل
اے ب، ج ہیں۔

۲۲۔ ایک پچکار چلی جبکہ وہ تنبی ہوئی نہ ہو نصف قطر کے اسطوانے کی منحنی شکل اختیار کرتی ہے۔ اگر اس کے سرے ثابت کر دئے جائیں اور اس میں ہوا داخل کی جائے اور پھر اس کے سرے بند کر دئے جائیں تو ثابت کرو کہ محور میں سے گزرنے والی کسی ترانسس کو محدود کرنے والا منحنی مسادات

$$(ا + ف) \left(\frac{دباؤ}{۲} - ۱ \right) = ۲ (گ - ۱)$$

سے حاصل ہوگا۔ جہاں ف وہ زاویہ ہے جو محاس محور کے ساتھ بناتا ہے۔ محور پر کا عمود ما، بیرونی دائرونی دباؤں کا فرق د، اور لچک کی شرح ل ہے۔ مستقل ف، گ اور ایک تیسرے مستقل جو مسادات کے مکمل سے حاصل ہو کس طرح معلوم کئے جاسکتے ہیں۔

۲۳۔ ایک ظرف مبین ملام اور امتدادنا پذیر مادہ سے بنایا گیا ہے۔ اس کی شکل ایسی سطح کی ہے جو ایک زنجیرہ (Catenary) کو جبکا تبدیل ک ہے اپنے محور کے گرد گھمانے سے پیدا ہوتی ہے۔ اگر محور سے لا فاصلہ پر صدری تناؤ ت، ت ہوں تو ثابت کرو کہ

$$۲ - ت : ت = لا / گ : جہز ۲ لا / گ$$

جبکہ یہ فرض کر لیا جائے کہ اندرونی دبیرونی دباؤں کا فرق مستقل ہے۔

۲۴۔ اگر ایک ملام ظرف جن کی سکون، خطادیر کو اپنے قاعدے کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے مائع سے عین بھرا ہوا ہو جو بغیر کسی بیرونی قوتوں کے عمل کے محور کے گرد یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو تو ثابت کرو کہ نصف النہاری

۱۶۔ ایک محب امتداد ناپذیر مائع نفاذ گردشی سطح کی شکل کا ہے اور اس کے گردش کا محور انتصابی ہے۔ یہ نفاذ اندر سے آبی دباؤ کے زیر عمل ہے۔ ثابت کرو کہ نصف النہاروں کی سمت میں سب سے چوڑے حصہ پر کا تناؤ اعظم یا اقل ہوگا۔ بموجب اس کے کہ یہ تناؤ نصف النہاروں کے عمود وار تناؤ سے کم یا زیادہ ہو۔

۱۷۔ قائم مستدیر مخروط کی شکل کا ایک مائع تھیلہ مائع سے عین بھر دیا گیا ہے اور اس کے قاعدے کی کوہ ایک استوار مستوی کے ساتھ ثبت کر دی گئی ہے۔ قاعدے کے مرکز سے دافع قوتیں مائع پر عمل کرتی ہیں جو ایسے بدلتی ہیں جیسے فاصلہ۔ کسی نقطہ پر صدری تنؤ معلوم کرو۔

۱۸۔ اگر استوار مستوی میں ایک سوراخ کر دیا جائے اور اس میں فشارہ لگا دیا جائے اور پھر اس فشارہ پر ایک ضرب لگائی جائے تو کسی نقطہ پر صدری دھکا تناؤ معلوم کرو۔

۱۹۔ اگر دھکا (۱۵۱) میں، ظرف مکانی نما کی شکل کا ہو اور ماسک میں سے گزرنے والی افقی حرارتمیں کے ہر نقطہ پر صدری تناؤ مساوی ہوں تو ثابت کرو کہ محور کا طول و تر خاص کا $\frac{1}{2}$ ہوگا۔

۱۹۔ مائع کی کچھ مقدار جو ایک پتلے کر دی خول میں ہے انتصابی قطر کے گرد یکساں نفاذی سے مگھوم رہی ہے۔ کسی نقطہ پر صدری تناؤ معلوم کرو اور گھومنے کی رفتار میں اضافہ کے اثرات کی جانچ کرو۔

۲۰۔ ایک مائع سطح اس قسم کی ہے کہ اس کے کسی نقطہ پر کا تناؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے اور جس کی شکل مساوات $y = f(x)$ سے حاصل ہوتی ہے۔ یہ سطح سیال کے زیر عمل ہے۔ کسی نقطہ پر کے دباؤ کو تناؤ کے ساتھ جو نسبت ہے اس کو معلوم کرو۔

ثابت کرو کہ یہ نسبت سطح $y = 3x^2$ (لا + ا) کے ایسے نقاط پر ۳:۱ ہے جہاں $y = 1$ ۔

۲۱۔ ایک قائم مستدیر اسطوانہ لچکدار مادے سے بنایا گیا ہے اور اس کے سرے استوار مستویوں کے ساتھ لگادئے گئے ہیں۔ اس کو سیالی دباؤ سے منایا گیا ہے۔ یہ مائیکر کو نصف النہاری اور دائری تراشوں میں تباہ ہونگے کے کلیہ (Hooke's law) کے تابع ہیں ایسی مساواتیں معلوم کرو جو اسطوانہ کی اختیار کردہ شکل کو پوری طرح معین

$$\frac{(3m-2)(1-n^2)n^2}{(1-m^2)^2} + n^2 = \frac{t}{t}$$

ٹھیک بیٹھتی ہے۔ اگر صندوق سے ہوا بندہ بیچ خارج کر دی جائے تو پچکار بندھن جو ٹھیکیں اختیار کرتی ہے ان کو معلوم کرو۔ اور جب بندھن صندوق کی تہ کو عین مس کرے تو اس وقت کرہ ہوائی کے اندرونی و بیرونی دباؤ میں جو فرق ہوگا اس کو معلوم کرو۔

۶۔ دائری سوراخ کی ایک پچکار نلی، مربع سوراخ کی ایک استوار نلی میں رکھ دی گئی ہے جس میں وہ بغیر تنے ہوئے ٹھیک بیٹھ جاتی ہے۔ نلیاں لامتناہی طول کی ہیں۔ اگر نلیوں کے درمیان ہوا نہ ہو اور کسی دباؤ کی ہوا پچکار نلی میں داخل کی جائے تو ثابت کرو کہ یہ دباؤ اس نسبت کے متناسب ہوگا جو پچکار نلی کے اس حصہ کو جو استوار نلی کو مس کرتا ہے اس حصہ سے ہے جو منحنی شکل کا ہے۔

۷۔ ایک غزن جو کسی پتلی خے سے بنایا گیا ہے مخروطی شکل کا ہے اس کا اس نیچے وار اور محور انتہائی ہے۔ اس کو مانع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کا سرابند کر دیا گیا ہے اگر اس کو اپنے محور کے گرد یکساں رفتار سے گھمایا جائے تو کسی نقطہ پر کے صدری تناؤ معلوم کرو۔

۸۔ ایک کر دی پچکار لفافہ کے گرد اور اس کے اندر ہوا ہے جو کرہ ہوائی کے دباؤ (۳) پر ہے۔ اس کے اندر ہوا کی مساوی مقدار داخل کر دی گئی ہے۔ ثابت کرو کہ لفافہ کے کسی نقطہ پر کا تناؤ $\frac{3}{2} (r_2 - r_1) / r_2$ ہو جاتا ہے جہاں ابتدائی اور انتہائی نصف قطر کو r_1 و r_2 تعبیر کرتے ہیں۔

۹۔ ایک پچکار کر دی لفافہ میں جس کا قدرتی نصف قطر r ہے ہوا داخل کی گئی ہے جس سے اس کا نصف قطر b ہو جاتا ہے پھر اس کو ایک قابلمہ میں جس میں سے ہوا خارج کر دی گئی ہے رکھ دیا گیا ہے جس سے اس کا نصف قطر c ہو جاتا ہے۔ ہوا کی مقدار معلوم کرو جو اس میں داخل کی گئی ہے۔ یہ فرض کر لیا جائے کہ تناؤ سطح کے اضافہ کے متناسب ہے۔

۱۰۔ نصف قطر کا ایک پچکار کر دی لفافہ ہوا سے بھر دیا گیا ہے جس کی تمش (ت) اور دباؤ وہی ہیں جو گرد کی ہوا کے ہیں۔ تناؤ سطح کے اضافہ کے متناسب ہے اور اگر اندرونی ہوا کی مقدار دو چند کر دی جائے تو نصف قطر m ہو جاتا ہے اور پھر اگر اندرونی تمش کو $2t$ تک بڑھا دیا جائے تو نصف قطر n ہو جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ

۱۵۵۔ اس باب کے مسائل عموماً اُن سطحوں پر قابل استعمال نہ ہونگے جو غیر ملائم یا جن کی ملائمت ناقص ہو۔ لیکن اگر کسی خاص صورت میں سطح کے متصلہ حصوں کا درمیان عمل کلا ماسی مستوی میں ہو تو تیناؤ اور عمادی دباؤ کے درمیان محصلہ ردابط برقرار رہیں گے۔

مثلاً اگر ایک انقباضی مستدیر اسطوانہ کسی غیر ملائم شے سے بنا ہوا درہیں سیال بھردیا جائے تو کسی نقطہ پر کا عمل کلا ماسی سمت میں ہوگا اور اس کی نوعیت تیناؤ کی سی ہوگی۔

امثلہ

۱۔ یہ فرض کر کے کہ برا کے شکنجہ کے اسطوانے ایک ہی مادی شے سے بنے ہوئے ہیں اور ہر ایک کے اندر زور (Stress) وہی ہے اسطوانوں کی موٹائیوں میں نسبت معلوم کرو۔

۲۔ ایک اسطوانی ظرف ۱۰ انچ موٹے دیات کے پتر سے بنایا گیا ہے اور اسی دیات کا ایک ڈبڈبا جس کی تراش کا رقبہ ۱ مربع انچ ہے بغیر ٹوٹنے کے وزن ۱۰ کو عین سنبھال سکتا ہے۔ اگر اسطوانہ کو انقباضی محور کے ساتھ رکھا جائے تو معلوم کرو کہ اس میں کتنا سیال ڈالا جاسکتا ہے کہ یہ پھٹ نہ جائے۔

۳۔ ڈھلے ہوئے لوہے کی تیناؤی (Tensile) طاقت تراش کے فی مربع انچ کے لئے ۱۶۰۰۰ پونڈ وزن ہے۔ ایک ڈھلے ہوئے لوہے کے پانی کے ایسے ٹل کی موٹائی معلوم کرو جس کا اندر دنی قطر ۱۲ ہے کہ اس پر کا زور اس کی انتہائی مضبوطی کا صرف ۱/۲ ہو جبکہ پانی کا ارتفاع ۴۸ فٹ ہو۔

۴۔ ایک بچھڑاؤ کو جس کا راس نیچے دار ہے پانی سے بھردیا گیا ہے۔ معلوم کرو کہ افقی تیناؤ سب سے زیادہ کہاں ہے۔

نیز معلوم کرو کہ کون کی سمت میں تیناؤ کی قیمت سب سے زیادہ کہاں ہے۔

۵۔ ایک مستطیل صندوق کے اوپر کا رخ یکساں پکدار بندہ بن (Band) کو (۱۵۴) اس کے مقابل ضلعوں پر بائذہ دینے سے بند کرو یا گیا ہے بندھن دوسرے اصنلاع پر

اندرونی ہوا کے دباؤ سے توازن برقرار رہتا ہے تو

$$۲۲ \text{ ل } \left\{ ۲ + \frac{۲}{۲} (۱ - ۱) \right\} \frac{۲}{۱} = ۲۲ \text{ ل}$$

جس سے

$$۲ = ۲ \text{ د ک}$$

اور پھر تناؤ ہو جاتے ہیں۔

$$۲ = \frac{۲}{۲} \text{ د ک} \quad ۳ = \frac{۳}{۲} \text{ د ک}$$

(۱۵۶) ۱۵۴۔ ہم نے اب تک صرت یکساں موٹائی کے پتروں پر غور کیا ہے لیکن ایسی صورتوں کو بھی شامل کرنے کی خاطر جن میں پتر کے متغیر موٹائی کے ہوں تناؤ کا زیادہ عام ناپ دریافت کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی متجانس مادے کی سلاخ اب سے وزن و لٹکایا گیا ہے اور سلاخ کی تراش کا رقبہ کہ ہے تب ن میں سے گزرنے والی تراش پر کا تناؤ، وزن و اور سلاخ کے حصہ ن ب کے وزن کو تھامے ہوئے ہے۔



اور اگر ان اوزان کا مجموعہ کہ ہو تو نقطہ ن پر تناؤ کا ناپ فی اکائی رقبہ ہوگا۔

یہ معلوم رہے کہ ت کی نسبت کہ بقدر ایک کے

کم ہے۔

درحقیقت اگر کسی نقطہ پر ایک علامہ پتر سے کی موٹائی

ع ہو اور اس پر کا تناؤ ت ہو جو معمولی طریقہ سے تراش کی فی اکائی طول کے لئے معلوم کیا گیا ہے تو

$$ت = ۲ = ۲ \text{ ع ص}$$

$$ت = ۲ = ۲ \text{ ع}$$

یا

اگر $L = \text{تواز مس عہ} = \text{عالم (س)} + \text{س (س جم عہ)} + \text{س (س جم عہ)}$
 (۲) ایک لامٹم جہلی زنجیرہ نما (Catenary) کی شکل کی ہے یعنی ایسی سطح
 کی شکل کی ہے جس کی تکوین ایک زنجیرہ کو اس کے مرتب کے گرد گھمانے
 سے ہوتی ہے۔ اس جہلی کے سرے نصف قطر a کے دو مساوی
 دائری تختوں سے ثابت کر دئے گئے ہیں بلکہ دونی ہوائی دباؤ کا اضافہ
 بیرونی ہوائی دباؤ پر د معلوم ہے۔

اس صورت میں انحناء متقابل سمتوں میں ہیں اور اگر n پر کا عماد n گ
 ہو تو ہر ایک نصف قطر انحناء n گ کے مساوی ہوگا اور توازن کی مساواتیں ہونگی

$$T - T = W \times n \quad \text{اور} \quad T = \frac{W}{2} \times (a^2)$$

اور چونکہ $n = \frac{1}{2} \times \text{اک فرت} = \frac{1}{2} \times \text{دما جہاں ک زنجیرہ کا مستقل ہے}$

$$2 \quad (T - T) = W \times (a^2 - k^2)$$

جہاں T ، اس پر کا نصف انہاری تناؤ ہے

$$T = T + \frac{W}{2} \times (a^2 - k^2)$$

ان میں سے پہلی مساوات حصہ n کے توازن پر غور کرنے سے فوراً
 حاصل ہو سکتی ہے جہاں زنجیرہ کے اس کو a تعمیر کرتا ہے اور پھر T کی قیمت
 مساوات $T - T = \text{در سے حاصل ہو جاتی ہے}$
 اگر تختوں کے وزن کو نظر انداز کیا جائے اور یہ فرض کیا جائے کہ

ت = $\frac{1}{3}$ ج ت لاٹم مس عم قطع
فرض کرو کہ مانع نکل جانے کے بعد سطح جس گروشی سطح کی شکل اختیار کرتی ہے
اس کا تکوینی منحنی و ن قی ہے، اور و ل = صا، ن ل = عا، اور ن
نقطہ ن کا جواب ہے۔

اگر ن قی = مف س، منحنی کی ایک چھوٹی قوس
تو مف لا قطع = مف س $(1 + \frac{ت}{ل})$

اور لاٹم مس عم = عا $(1 + \frac{ت}{ل})$

لچک کے مقیاس کو دو نوز سمتوں میں مختلف لینے سے۔
ت اور ت کی حاصل شدہ قیمتوں کو استعمال کر کے لا کو ان دو مساواتوں
سے سا ق کیا جاسکتا ہے اور اس طرح صا اور عا میں ایک ربط حاصل ہو جاتا ہے۔

(۱۵۵)

پہلی مساوات میں ج ت مس عم قطع = $\frac{1}{3}$ رکھو اس طرح حاصل ہوگا

$$\frac{1}{\frac{ل}{۲} + 1} = \frac{ف س}{ج م ع}$$

یا $\frac{س}{۱} ج م ع = مس - \frac{ل}{۲}$ ، اگر س کو دے لیا جائے

$$\frac{ل}{۲} = مس - (س ج م ع)$$

لا کی یہ قیمت دوسری مساوات میں مندرج کرنے سے حاصل ہوگا

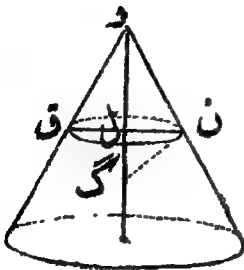
مس عم س $(س ج م ع) = عا (1 + \frac{ج ت لاٹم مس عم قطع}{ل})$ مس $(س ج م ع)$
جو منحنی کی تفرقی مساوات ہے۔

پھر اگر نقطہ پر $ت = ت$ تو $فرت = ۰$ اور اس لئے $ت$ مستقل ہے۔

۱۵۳۔ امثلہ۔ (۱) ایک مخروطی شکل کے کامل طور پر ملائم اور بکھرا ہوا تھیلے کو نیچے وارمنہ کے ساتھ ایک افقی مستوی پر کور سے جوڑ دیا گیا ہے اور اس پر کے ایک چھوٹے سوراخ کے ذریعہ اس کو مائع سے بھر دیا گیا ہے جس سے سکون کی حالت میں اس کی شکل قائم مستدیر اسطوانہ کی شکل ہو جاتی ہے۔ اگر مستوی سے اس کا احاطہ توڑ دیا جائے اور مائع باہر نکل پڑے تو اس شکل کی مساوات معلوم کرو جو یہ اختیار کریگا اگر اس کے وزن کو نظر انداز کر دیا جائے۔

فرض کرو کہ نقطہ $ن$ پر کمون $ون$ کے عمود وار سمت میں تناؤ $ت$ ہے اور سمت $ون$ میں تناؤ $ت$ ہے اور مخروط کا زاویہ راس ۲ ہے۔

تب $و = \frac{ت}{ر} + \frac{ت}{ر}$ سے (اگر $ول = لا$) حاصل ہوگا



$$ج ث لا = \frac{ت}{ن ق} = \frac{ت}{لا مس ع ق ط ع}$$

یا $ت = ج ث لا مس ع ق ط ع$

لیکن $ن ق$ $ل$ $ت$ $جم ع = و ن ق$ پر حاصل انتصابی دباؤ
 $= \frac{ت}{ر} ج ث لا مس ع$

نصف النہاری ستویں کا درمیانی زاویہ مف ف ہے اور نصف النہاریوں کے تقاطع اور سما پر گئے ماسی خطوط کے درمیان زاویہ ۲ مف سا ہے۔

تب $\text{ن سما} = \text{مف ف}$ اور $\text{ن ت} = \text{مف س}$
 ن سما اور ن ت کی تنصیف کرنے والے نصف النہار کی سمت کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے

$$\frac{\text{ف}}{\text{ر}} (\text{ت ا مف ف}) \text{ مف ا} = ۲ \text{ ت مف س جب مف سا}$$

$$= \text{ت مف س} \frac{\text{ن سما}}{\text{ن ت}} = \text{ت مف س} \frac{\text{مف ف}}{\text{ن ت}}$$

اور چونکہ

$$\frac{\text{ا}}{\text{ن ت}} = \text{جب ط} = \frac{\text{ف}}{\text{ر س}} ، \text{ فکل دفعہ (۱۵۰)}$$

اس لئے مساوات ذیل حاصل ہوتی ہے (۱۵۴)

$$\frac{\text{ف}}{\text{ر}} (\text{ت ا}) = \text{ت}$$

اور چونکہ $\text{ر} = \text{ا ق ط}$ اس لئے

$$\frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\text{ت ا جم ط}}{\text{ا}} = \text{د}$$

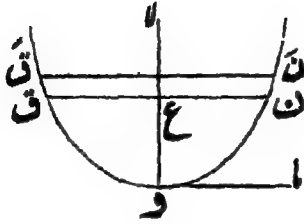
اور اس لئے ان دو مساواتوں سے ت اور د معلوم ہو جاتے ہیں۔
 پہلی مساوات سے ظاہر ہے کہ اگر کسی افقی تراش پر ت اعظم یا اقل ہو

اور اس لئے $\frac{\text{ف}}{\text{ر}} = \text{صفر}$ ہو جائے تو

$$\text{ت} = \text{د}$$

لیکن اگر ماہی اعظم یا اقل ہو تو یہ نتیجہ برآء نہیں ہوتا کیونکہ ہم یہ نتیجہ نہیں نکال سکتے کہ $\frac{\text{ف}}{\text{ر}} = \text{صفر}$ ہے۔

ان دونوں کا فرق، دائروں
ن ق، ن ق کے درمیان
سطح کی جو بیڑی ہے اُس پر کے ولا
کے متوازی حاصل دباؤ کی
تبدیل کرتا ہے۔ یہ حاصل دباؤ
۲۴ × ۴۴ مافس فرما
فرس
کے مساوی ہے اگر دائرہ
ن ق کے کسی نقطہ پر کا دباؤ
د ہو۔



$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرس}} (\text{ا ت فرس}) = \frac{\text{د ا فرس}}{\text{فرس}}$$

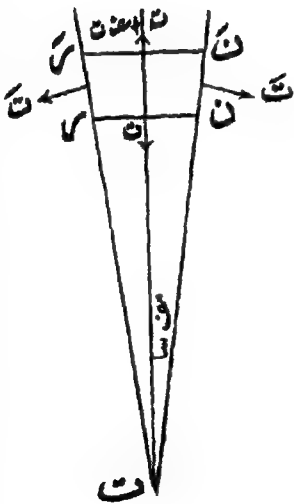
اور چونکہ لاکا ایک دیا ہوا تقاطع ہے اور اسلئے
س کا تقاطع ہے اس لئے یہ مساوات تناؤ
کا تعین کرتی ہے اور ت گزشتہ کی طرح مساوات

$$\frac{ت}{ر} = \frac{ت}{ر} + \frac{ت}{ر}$$

سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۵۲۔ دو کو سا قط کرنے سے ہیں ت اور ت
میں ایک ربط حاصل ہو گا لیکن بہتر یہ ہے کہ یہ ربط
بالراست حاصل کیا جائے۔

ایک چھوٹا عنصر ن ت مرا دو جو نصف انہار
توسوں ن ت مرا مرا سے اور دائری قوسوں
ن مرا ن ت مرا سے محدود ہے، فرض کرو کہ



اس مساوات سے t کا تعین ہو جاتا ہے۔ اور t مساوات

$$\frac{t}{r} + \frac{t}{r} = d \quad \text{دفعہ (۱۴۵) ۵}$$

سے حاصل ہوتا ہے جہاں $d = \text{ج ج ٹ (م - لا)}$ ۔
یہ یاد رہے کہ معنی Δ کے نقطہ n پر نصف قطر انخار ہے اور اس کے
عمود وار جو عمادی تراش ہے اس کا نیم قطر انخار یعنی n گ ہے۔
۱۵۱۔ اس سے زیادہ عام مسئلہ حسب ذیل ہے۔

ایک لامٹم ظرف گردش کی سطح کی شکل کا ہے اور سیالی دباؤ کے
زیر عمل ہے اس طرح ہر کہ کسی دائری تراش کے تمام نقطوں پر سیالی
وباؤ وہی ہے۔ کسی نقطہ پر کے صدری تناؤ معلوم کرنا مطلوب ہیں۔
فرض کرو کہ n ع ق، n ع ق دو متصل دائری تراشیں ہیں اور
نقطہ n پر کا نصف النہاری تناؤ t ہے۔

اگر n = s تو دائرہ n ق پر محور کے متوازی حاصل تناؤ

$$= \frac{2 \pi r t}{\text{فرس}}$$

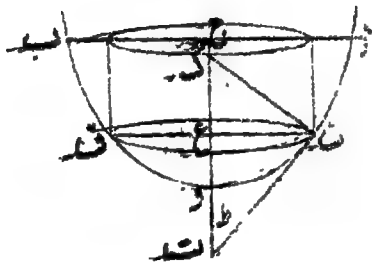
n ق پر رولا کے متوازی حاصل تناؤ

$$= \frac{2 \pi r t}{\text{فرس}} + \frac{2 \pi r t}{\text{فرس}} \left(\frac{\text{مات فرس}}{\text{مات فرس}} \right) \{ \text{اگر } n = \text{مفیس} \}$$

یہ مساوات اس صورت کے لئے اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے۔ ایک چھوٹا عنصر l جو انخار کے
خطوط سے محدود ہو یعنی نصف النہاروں اور افقی دائروں سے۔ Meunier (Meunier)
کا مسئلہ استعمال کرو اور اس کا خیال رکھو کہ انخار کے خطوط کے نشی معنی عام طور پر عمادی مستوی
ہیں ہوتے۔

صورت میں لیتے ہیں۔ مثلاً صبادی لہر کی صورت میں یا ان جھیلوں کی صورت میں جو
سستے کی بوتل میں نکالیں گی جیسا کہ اس کے اندر کے مانع کو خوب ہلایا جائے۔
زنج جھیلوں کی بجائے کم آئندہ اسباب کے متعلق یہ کہتے ہیں۔

۱۔ ثا۔ اسباب کے ساتھ جو ملا کر اور اسے تداو پانچیر شے سے بنایا گیا ہر شے کی روشنی
سطح کی شکل کا ہے۔ اس کو انتصابی محور کے ساتھ پکڑ کر متجانس مانع سے (۱۵۲)
تھیر دیا گیا ہے۔ کسی نقطہ پر سہمی تناؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔
فرض کرو کہ و طرف کا زیر ترین نقطہ ہے۔ دو مبداء قرار دو۔



۱۔ ثا۔ اسی طرح اور یہ وار تداو اور
فرض کرو کہ کوئی افقی تراش
تساوی ہے۔ اوپر کا
تدارد آج ہے
یہ ثابت ہے
افقی تراش نقطہ
سے تمام نقطوں پر دباؤ نہ کرے
وہی ہے۔

فرض کرو کہ نصف النہادی تہذیب سے یعنی وہ تداو جو منحنی (۱۵۳) کے
انہی دہرے کے عاقل کی سمت میں نقطہ (۱۵۳) پر تراشے اور فرض کرو کہ نقطہ (۱۵۳) پر
تداو تھا ہے۔ یہ صورتی تداو ہے۔ تراش نقطہ کے ساتھ ساتھ تداو
انتصابی حاصل، سطحین و نقطہ پر کے حاصل انتصابی دباؤ کی تبدیل کرنا ہے۔
پس اگر

$$x = 1, y = 1, z = 1 \text{ اور } x = 1, y = 1, z = 1$$

$$x = 1, y = 1, z = 1 \text{ اور } x = 1, y = 1, z = 1$$

$$= \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)^2$$

(۱۵۱) اور ف سرکھاؤ پر $\frac{\text{جف}^2}{\text{جف لاجف}}$ کی قیمت ہے۔

$$\therefore \text{جب } 2 \text{ فر } = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right)^2 = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لاجف}}$$

$$\therefore \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لاجف}} = \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\text{ت}}{\text{ر}'} + \frac{\text{ت}}{\text{ر}''}$$

۱۴۸۔ ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اگر انتخاب شدہ سمتیں دلاؤ، صوری انحناء کی سمتوں پر منطبق ہو جائیں تو $d = 0$ اور ضابطہ بالا

$$d = \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\text{ت}}{\text{ر}'} + \frac{\text{ت}}{\text{ر}''}$$

میں تحول ہو جاتا ہے۔ پس یہ ضابطہ درست رہتا ہے جبکہ منتخبہ سمتیں صوری تناؤ کی سمتیں ہوں یا صوری انحناء کی سمتیں۔

۱۴۹۔ اگر ہم ایک ایسی سطح کا تصور کریں جس کی نوعیت اس طرح کی ہو کہ اس کے کسی نقطہ پر کا تناؤ اس نقطہ میں سے گزرنے والے ایک خط تقسیم پر ہمیشہ عمود وار عمل کرے تو یہ بتایا جاسکتا ہے کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ ہر سمت میں دہی ہوتا ہے۔

اگر ایسی سطح کے ایک چھوٹے مثلثی حصہ پر غور کیا جائے تو ماسی مستوی کے اندر کا توازن مثلث کے ضلعوں کے تناؤ سے پوری طرح متعین ہو جاتا ہے کیونکہ ماسی مستوی میں کے قواء عالمہ (اگر کوئی ہوں) بمقابلہ تناؤں کے بالآخر معدوم ہو جاتی ہیں اور چونکہ ضلعوں کے تناؤ اضلاع پر عمود وار ہیں ان کو ضلعوں کے طولوں کے متناسب ہونا چاہیے اور اس لئے تمام سمتوں میں تناؤ کے ناب دہی ہیں۔

نیز سطح پر تناؤ ہر جگہ دہی ہو گا کیونکہ اگر ایک چھوٹے مستطیلی عنصر پر غور کیا جائے تو متقابلہ ضلعوں پر کے تناؤ مساوی ہونے چاہئیں۔

اس قسم کی سطح کا تصور کرنا بالکل ایسا ہی ہے جیسا کہ ایک کال استوار جسم یا ایک سیال کال کا تصور کرنا ہے تاہم ایسی سطحوں کے قریب ترین نوے ائج جیلوں کی

$$\therefore \frac{ت^۲}{ر^۲} + \frac{ت}{ر} = (ت جم ط + ت جب ط) \left(\frac{جم ف}{ر} + \frac{جب ف}{ر} \right)$$

$$+ (ت جب ط + ت جم ط) \left(\frac{جب ف}{ر} + \frac{جم ف}{ر} \right)$$

$$= ت \left\{ \frac{جم^۲ (ط - ف)}{ر} - \frac{جب ط جب ف}{ر} + \frac{جب ط (ط - ف)}{ر} + \frac{جب ط جب ف}{ر} \right\}$$

$$+ ت \left\{ \frac{جب ط (ط - ف)}{ر} + \frac{جب ط جب ف}{ر} - \frac{جم^۲ (ط - ف)}{ر} - \frac{جب ط جب ف}{ر} \right\}$$

$$= \frac{ت}{ر} + \frac{ت}{ر} - (ت - ت) \left(\frac{جب ط جم ط جب ف}{ر} \right) \left(\frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} \right)$$

$$= \frac{ت}{ر} + \frac{ت}{ر} - ت جب ف \left(\frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} \right)$$

$$\therefore \frac{ت^۲}{ر^۲} + \frac{ت}{ر} + ت جب ف \left(\frac{۱}{ر} - \frac{۱}{ر} \right) = \frac{ت}{ر} + \frac{ت}{ر} = د$$

لیکن د کے قرب و جوار میں سطح کی مساحات اس طرح لکھی جاسکتی ہے

$$۲ ی = \frac{۲}{ر} + \frac{۲}{ر} \text{ اگر } د ج، و ج \text{ اور د ر کے عماد کو محور مانا جائے تو } د،$$

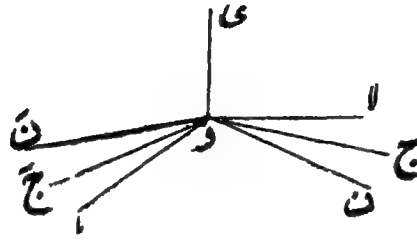
وی کے حوالے سے یہ مساحات ہوگی $۲ ی = ۲ ف + ۲ ف لا + ۲ ب ا$

اور چونکہ محوروں کے ان دو نظاموں کا درمیانی زاویہ ف ہے اس لئے

$$\frac{۲ ف}{۲ (۱ - ب) + ۲ ف} = جب ف$$

$$\text{اور } (۱ - ب) + ۲ ف = ۲ (۱ + ب) - ۲ (۱ - ب - ف)$$

$$= \left(\frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} \right) - \frac{۲}{ر}$$



(۱۵۰) اگر کسی دو علی التواء سمتوں والا دما میں تناؤ تھا، تہا ہوں اور ان میں سے کسی ایک سمت میں ماسی عملت ہو اور سمتوں ون، ون میں صدی تناؤ تھا، تہا ہوں اور زاویہ ن ولا = ط، تو دفعہ (۱۳۹) کی رو سے

$$ت = تجماط + تجباط$$

$$ت = تجباط + تجماط$$

$$ت = (ت - ت) جب ط جھ ط$$

اور

اب اگر صدی انخما کی سمتیں وج، وج ہوں اور زاویہ ج ولا = فہ، اور انخما کے صدی نصف قطر سہ، سہ ہوں اور ولا ولا ون، ون میں سے گزرنے والی عمادی تراشوں کے نصف قطر لہ، لہ، ر، ر ہوں تو

$$\frac{1}{ر} = \frac{جماف}{سہ} + \frac{جباف}{سہ} ، \frac{1}{لہ} = \frac{جباف}{سہ} + \frac{جماف}{سہ}$$

$$\frac{1}{ر} = \frac{جم(ط-فہ)}{سہ} + \frac{جب(ط-فہ)}{سہ} ، \frac{1}{لہ} = \frac{جب(ط-فہ)}{سہ} + \frac{جم(ط-فہ)}{سہ}$$

اور اسی طرح نقطہ (۱۳۹)

$$\text{مس لہ} = \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2} (-\text{و ل})$$

پس سمت وی میں اعمال ت \times ج د اور ت \times ع ف کا مجموعہ

$$= \text{ت} \times \text{ج د} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2} \text{و ل} - \text{ت} \times \text{ع ف} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2} (-\text{و ل})$$

$$= \text{ت} \times \text{ج د} \times \text{ع} \times \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2}$$

اور اسی طرح کی رقم عمل ت سے حاصل ہوگی۔

دی کی سمت میں تحلیل کرنے سے اب ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{ر} \times \text{ج د} \times \text{ع} = \text{ت} \times \text{ج د} \frac{\text{و ل}}{\text{ر}} + \text{ت} \times \text{ع} \frac{\text{و ب}}{\text{ر}} + \text{ت}$$

$$\times \text{ج د} \times \text{ع} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2} = \text{ر} = \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \frac{\text{ت}}{\text{ر}} + \text{ت} \frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2}$$

۱۴۷۔ وفات (۱۳۹) اور (۱۴۵) سے بھی یہی نتیجہ حاصل کیا جاسکتا ہے اور اگرچہ یہ طریقہ بہت طویل ہے لیکن اس میں یہ فائدہ ہے کہ ہمیں عددی تناؤ کی سمتوں اور عددی انحناء کی سمتوں کے درمیان تمیز کرنے کی اہمیت اچھے طور پر واضح ہو جاتی ہے۔

بقیہ نوٹ صفحہ ۱۲۸۔ جہاں ف (۰) = مس ط کی قیمت و پرنی و ب $\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2}$ کی قیمت اور ف (۰) =

$$\frac{\text{جف}}{\text{جف لاجف}^2} \left(\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2} \right) \text{یا} \left(\frac{\text{جف}^2 \text{ی}}{\text{جف لاجف}^2} \right) \text{کی قیمت و پ۔}$$

لہ۔ ٹائم سطحوں کے توازن کے عام مسئلہ پر ڈیویو، ایچ، بیٹ نے

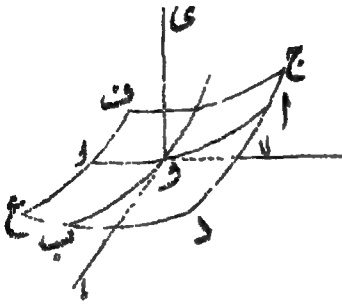
Quarterly Journal of Mathematics, Vol. IV, 1860. میں بحث کی ہے۔

$$+ \left\{ 1 + \left(\frac{\text{جف م ی}}{\text{جف م ا}} \right) \right\} \frac{\text{جف م ی}}{\text{جف م ا}}$$

اس مساوات کو لگراج اور پاسن نے حاصل کیا تھا۔

۱۴۶۔ کسی سمت میں تناؤ۔ اگر ت اور ت کی سمتیں وہی نہ ہوں جو صدری تناؤں کی ہیں تو مساوات میں ماسی عمل داخل ہوگا۔

سطح پر کوئی نقطہ ولو اور ول
دوب ایک دوسرے پر علی التوا تم لے کر
فرض کرو کہ ان سمتوں میں تناؤ ت، ت
ہیں اور ماسی اعمال حرکت۔ وہر
عماد وی کھینچو۔



عمادی مستویوں (وی، اب وی
کے متوازی اور ان سے بالکل قریب جار
مستوی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ مستوی سطح کو
ج، د، ع، ف، ج میں
قطع کرتے ہیں۔

تب بالآخر ج د اور ع ف کے ماسی اعمال ت، ج د اور ت، ع ف
ایک دوسرے کے مساوی اگر سمت میں مخالفت ہیں، یہی حال ع د اور ج ف پر کے
ماسی اعمال کا ہے۔

(۱۴۹)

پس وی کے گرد معیار اخذ کرنے سے وہ ۱۳۸ کی طرح یہ معلوم ہو جاتا ہے کہ ت = ت۔
اگر معنی ج د کے نقطہ پر کے ماسی کا سیلان مستوی لانا کے ساتھ ط ہو تو

$$\text{مس ط} = \frac{\text{جف م ی}}{\text{جف م ا}} \times \frac{\text{ا}}{\text{و}}$$

لے کیونکہ ہم کہہ سکتے ہیں

$$\text{مس ط} = \text{ف} (د) = \text{ف} (ا) + (ا) \times \text{ف} (ا) + \dots$$

صدری تناؤ کے خطوط ن ق، ن قی پر واقع ہیں۔ قی اور قی میں سے عمادی
مستوی کھینچو جن ق اور ن قی پر عمود ہوں اور سطح کو اب، ا ب قوسوں میں
قطع کریں۔ (۱۲۸)

فرض کرو کہ ق ن، ق ن محدودہ کے متصلہ نقطوں میں سے گزرنے والی
عمادی مستوی قوسیں ب ج، ج د تراشی گئی ہیں۔

عنصر ب د، ماسی قوتوں ت × اب،

ت × ج د، ت × ا د، ت × ب ج اور عمادی قوت

د × اب × ب ج کے زیر عمل ساکن ہے۔

فرض کرو کہ منحنیوں ن ق، ن قی

کے نقطہ ن پر کے نصف قطر انحناء، ر

ہیں۔ تب ن پر عمادی سمت میں قوتوں کو

تحلیل کرنے سے ہیں بالآخر حاصل ہوگا

$$د \times اب \times ب ج = ۲ ت اب \frac{۱}{ر} + ۲ ت ب ج \frac{۱}{ر}$$

$$اور \quad د = \frac{ت}{ر} + \frac{ت}{ر}$$

اگر سطح کی نوعیت اس طرح کی ہو کہ ت = ت تو مساوات بالا ہو جائیگی

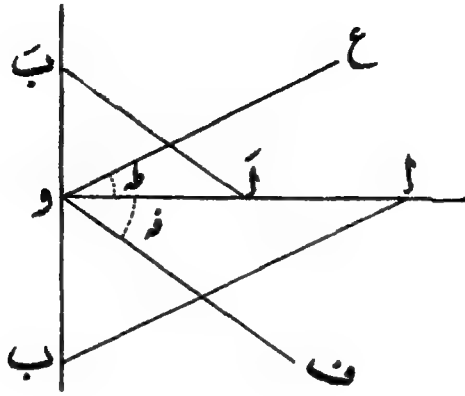
$$\frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} = \frac{۱}{ر} + \frac{۱}{ر} = \frac{۲}{ر}$$

جہاں ر، ر صدری نصف قطر انحناء ہیں۔

پس اگر سطح کی مساوات ی = ف (لا) ہو تو

$$\frac{د}{ت} = \left\{ ۱ + \left(\frac{جن ی}{جن لا} \right) + \left(\frac{جن ی}{جن لا} \right)^۲ \right\}$$

$$= \left\{ ۱ + \left(\frac{جن ی}{جن لا} \right)^۲ \right\} - \frac{جن ی جن ی جن ی جن ی}{جن لا جن لا جن لا جن لا} +$$



۱۴۴۔ اب اگر ہم ایک ملائم جہلی کی صورت پر غور کریں جو سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے اور اس کے ایک چھوٹے عنصر کے توازن پر غور کریں تو گزشتہ تین دفعات کے نتائج اس صورت پر بالکل عاید ہو جاتے ہیں کیونکہ عمادی دباؤ کے اجزائے تحلیلی انتہا میں بمقابلہ ماسی عمل کے معدوم ہو جاتے ہیں۔

۱۴۵۔ صدری تناؤ کی کسی شکل کی ایک ملائم سطح سیال کے زیر عمل ہے۔ کسی نقطہ پر کے دباؤ و صدری تناؤں، اور ان تناؤں کی سمتوں میں انحنائوں کے درمیان رابطہ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

فرض کر دو کہ ن کے متصل نقطے ق، ق، ہیں جو ن میں سے گزرنیوالے

لے طالب علم کو یہ سمجھ لینا چاہیے کہ صدری تناؤں اور صدری انحنائوں کے درمیان کوئی تعلق ہے۔

مثلاً ایک ایسی جہلی پر غور کرو جو ایک اسطوانہ کے گرد لیٹی گئی ہے جہلی پر اسی گھائی کے مرغولی خطوط (Helical lines) کی کچھ تعداد کھینچو۔

جہلی کو ان خطوط کی سمتوں میں تنایا جاسکتا ہے جو بالا و خرابے سے بڑے تناؤ کی سمتیں بن جائیں گی اس صورت میں عمودی تناؤ صفر ہو گا اور ایک کون پر کے نور کی سمت اس کون کے سمتیوں پر کی

کپاتی اور ساس پر کے زور بھی تعادل میں ہیں اور اس لئے سمتوں و ع اور ع و میں عمل کرتے ہیں۔

۱۴۲۔ اگر و ع اور و ف میں سے کے مزدوج زور س اور س ہوں اور اگر صدی تناؤ ت کی سمت کے ساتھ و ع اور و ف کے میلان ط اور ذ ہوں تو دفعہ (۱۴۰) سے مساواتیں

$$\frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{جم ذ}}{\text{ت}} + \frac{\text{جب ذ}}{\text{ت}}$$

$$\frac{1}{\text{س}} = \frac{\text{جم ط}}{\text{ت}} + \frac{\text{جب ط}}{\text{ت}}$$

حاصل ہوتی ہیں۔ جہاں ط اور ذ میں ربط ہے

$$\text{مس ذ مس ط} = \frac{\text{ت}}{\text{ت}}$$

ط اور ذ کو سا قط کرنے سے

$$\text{س س} = \text{ت ت}$$

پس معلوم ہوا کسی نقطہ پر دو مزدوج زوروں کا حاصل ضرب مستقل ہوتا ہے اور یہ مستقل صدری تناؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

۱۴۳۔ یہی نتیجہ دو مثلثی عناصر و ا ب، و ا ب کے توازن کی شرطوں کو لکھ لینے سے حاصل ہو سکتے ہیں جہاں ا ب اور ا ب، و ع اور و ف کے متوازی ہیں۔

اس طرح ہمیں مساواتیں

(۱۴۴)

$$\text{س جم ذ} = \text{ت جب ط} \quad \text{س جب ذ} = \text{ت جم ط}$$

$$\text{س جم ط} = \text{ت جب ذ} \quad \text{س جب ط} = \text{ت جم ذ}$$

حاصل ہونی چاہئیں۔ ان سے ہم ذکرہ بالا نتائج حاصل کر سکتے ہیں۔

نیز $\text{س} \times (\text{ب}^2 = \text{ت}^2 \times \text{و} \text{ب}^2 + \text{ت}^2 \times \text{و}^2)$

$$\therefore \text{س}^2 = \text{ت}^2 \text{ب}^2 + \text{ت}^2 \text{و}^2$$

اور ط کو ساقط کرنے سے ہیں ربط ملیگا

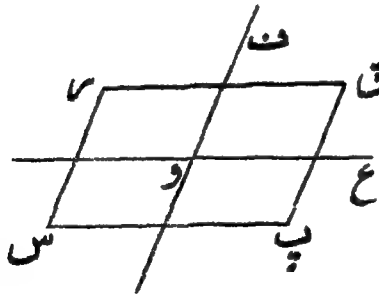
$$\frac{\text{ب}^2}{\text{ت}^2} + \frac{\text{و}^2}{\text{ت}^2} = \frac{\text{س}^2}{\text{ت}^2}$$

اگر اب سمتوں و اور ب میں نقطہ و کے صدری تناؤت اور ت ہوں اور اگر و ع کا سیلاں و کے ساتھ ہو تو و ع پر کے زور کی سمت و ت مساوات

$$\text{مس ذ مس ط} = \frac{\text{ت}^2}{\text{ت}^2}$$

سے حاصل ہوگی اور زور کی مقدار فی اکائی طول سمت و ت میں اس ناقص کے نصف قط سے تعبیر ہوگی جس کے نصف محاور صدری تناؤں سے تعبیر ہوتے ہیں۔

۱۴۱۔ مزدوج زور۔ اگر و ع پر کا زور و ت کی سمت میں عمل کرے تو و ت پر کا زور و ع کی سمت میں عمل کرے گا۔ (۱۴۶)



کیونکہ اگر ہم ایک ایسے عنصر کے توازن پر غور کریں جو ایک متوازی الاضلاع پ ق س و کی شکل کا ہو اور جس کے اضلاع و ع اور و ت کے متوازی ہوں تو پ س اور ق و پر کے زور متبادل ہیں اور اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے

ہو اس لئے اس سے نتیجہ نکلتا ہے کہ تہ اور تہ مساوی ہیں -
اب ایک چھوٹا مثلثی عنصر ول ب لوجو پر قائم الزاویہ ہے اور زوروں
کو شکل کے بموجب تعبیر کرو۔

(۱۴۵) ب ل کے متوازی قوتوں کو تحلیل کرنے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\text{تہ ل ب} + \text{تہ ول جم ط} + \text{تہ} \times \text{ول جب ط} = \text{تہ} \times \text{وب جم ط} + \text{تہ} \times \text{وب جب ط}$$

$$\text{تہ} = \text{تہ} - (\text{تہ} - \text{تہ}) \text{ جب ط} - \text{تہ} = \text{تہ} \text{ جم ط}$$

تہ صفر ہوگا جب کہ

$$(\text{تہ} - \text{تہ}) \text{ مس ط} = \text{تہ}$$

جس سے دو علی القوائم سمتیں حاصل ہوتی ہیں۔

۱۴۹۔ اگر شکل میں ہم یہ مان لیں کہ ول اور وب صفر ماسی عمل کی سمتیں
ہیں اور اگر قوتوں کو ب ل کے متوازی اور اس کے علی القوائم سمتوں میں تحلیل
کیا جائے تو مساواتیں

$$\text{تہ} = \text{تہ} \text{ جب ط} + \text{تہ} \text{ جم ط}$$

$$\text{تہ} = (\text{تہ} - \text{تہ}) \text{ جب ط} \text{ جم ط}$$

حاصل ہونگی۔

اس صورت میں مقادیر تہ اور تہ بڑے سے بڑے اور چھوٹے
سے چھوٹے یا چھوٹے سے چھوٹے اور بڑے سے بڑے تناؤں کو تعبیر کریں گی اور
اس لئے ہم ان کو صد ری تناؤ کہیں گے۔

۱۴۰۔ اگر ل ب پر کے حاصل زور مس ل ب کا میلان ول کے ساتھ فہوتو

$$\text{مس فہ} = \frac{\text{تہ} \times \text{ول}}{\text{تہ} \times \text{وب}} = \frac{\text{تہ}}{\text{تہ}} \text{ مم ط}$$

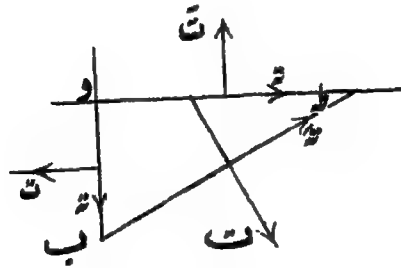
$$\text{مس فہ} = \frac{\text{تہ}}{\text{تہ}} \text{ مس ط}$$

اس لئے فہ (ع + سیم) = ع ۲ ، پس ع کی متناظر قیمت سیم ہونی چاہیئے اور مستقلوں اور دروں میں روابط ذیل ہونگے

$$ل = ط (سیم) - ط (سیم) - \frac{1}{4} ع سیم$$

ل = ۲ م سیم کے لئے کششیں کھینچی ہیں جس میں پانی ہوا سطح ب ج تک بھرا ہوا ہے۔ لیکن اگر پانی کی مقدار اس سے کم ہو تو کیرے کے وہ حصے جن کو پانی میں نہیں کرتا مستوی ہونگے اور ف کی قیمت اس صورت میں سطح آب کے نیچے راس کی گہرائی ہوگی۔

۸ م ا — تناؤ اور ماسی عمل — ایک مستوی ملائم جہلی کے توازن پر غور کرو۔ جہلی کے کسی خط پر کا زور یعنی سطح کے ان متصل حصوں کے درمیان عمل جو اس خط سے محدود ہیں عام طور پر اس خط کے ساتھ میلان رکھے گا اور اس لئے ایک تناؤ اور ایک ماسی عمل سے تعبیر ہوگا۔ اب ہم یہ بتائیں گے کہ کسی دو سمتوں میں جو ایک دوسرے پر علی التواائم ہوں تہ کی قیمت وہی ہوتی ہے اور یہ کہ دو سمتیں ایسی بھی ہوتی ہیں جن کے لئے تہ صفر ہو جاتا ہے۔



سطح کا کوئی مربع عنصر یعنی سے متقابل اضلاع کے ایک جوڑے پر کے ماسی اعمال تہ فرس اور (تہ + مف تہ) فرس انتہا میں جنت تہ مف س ۱ بناتے ہیں اگر عنصر کا ایک ضلع مف س ہو۔ اور چونکہ اس کی تبدیل دوسرے جنت تہ مف س سے ہونی چاہیئے اگر تہ علی التواائم سمت میں ماسی عمل

اور $\lambda = \frac{1}{2} \epsilon + \epsilon + \text{طا} + \text{سم} + \text{طا} (4 + \text{سم}) = \text{طا} (2 + \omega) \epsilon$

جہاں 'طا' دیرپہ اس کا ریٹا تعامل (Zeta-Function) ہے اور مستقل ہے۔

نیز جیکہ $\lambda = 0$ تو $\epsilon = 0$ اور $\omega = \text{سم} = \text{فہ} (\text{سم})$
پس $\epsilon = 0$ اور $\omega = \text{طا} (\text{سم})$ پس

$\lambda = \text{طا} (\epsilon + \text{سم}) - \text{طا} (\text{سم}) - \frac{1}{2} \epsilon + \epsilon \dots \dots (2)$

اور چونکہ 2 فن $\lambda = 1$ $\epsilon = 0$ و $\omega = \text{سم}$ اس لئے

2 فن $\lambda = 1$ $\text{فہ} (\epsilon + \text{سم}) - \text{سم} \dots \dots (3)$

نیز $\frac{\text{فرس}}{\text{فرما}} = \left\{ \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} \right)^2 + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرما}}$

اس طرح اپنی اندراجات ہے

$\frac{\text{فرس}}{\text{فری}} = \frac{\text{فرس}}{\left\{ \text{فری} (\text{فرس} - \text{فری}) (\text{فرس} - \text{فری}) \right\}^{\frac{1}{2}}}$

اور $\frac{\text{فرس}}{\text{فرو}} = \frac{\text{فرس}}{\text{فری} (\text{فرس} - \text{فری}) (\text{فرس} - \text{فری})}$

پس $\text{فرس} = \text{فری} = \text{فری}$

بشرطیکہ فرس کو فری سے فری جاسے، جہاں ϵ صفر ہو جاتا ہے۔
۴۳۱ اگر $\lambda = 1$ اور $\text{فرس} = 1$ جیکہ $\lambda = 1$ تو اس قیمت کے لئے
 $\text{فری} = \text{فری} = 1$ اور $\omega = \frac{1}{2} \epsilon + \epsilon = \text{فری} = 1$

اور فرض کرو کہ $ی = و + \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف)$

$$\frac{1}{۲} (۲م - ۲ف) - و$$

$$تو \frac{فرا}{فری} = \frac{\{م + و + \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف)\} \{و - \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف)\}}{\{م + و + \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف)\} \{و - \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف)\}}$$

$$اب فرض کرو کہ $و = \sqrt{\frac{فرو}{م(۲-و)(۲-ع)(۲-ع)}}$$$

$$جہاں $ع = \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف) - ع = \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف) - ع = \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف) - ع$$$

پس چونکہ (۱) سے $ف = ۲م$ جب $ع = ۲ف$ $۲م > ۲ف$

$$اس لئے $ع < ۲م < ۲ف$$$

اس لئے $و = \sqrt{\frac{فرو}{م(۲-و)(۲-ع)(۲-ع)}}$ جہاں $و$ مستقل ہے

$$اب $و > ۲ف$ ، اس لئے $و > ۲ف$$$

$$اور $و = \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف) > و > \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف) - و$$$

$$یعنی $ع > و > ۲م$$$

پس $و$ کو حقیقی لینے سے، $و$ کا خیالی حصہ، خیالی نصف دور سے ہونا چاہیئے اور اس کا حقیقی حصہ، $و$ کی زیرین حد کے مناسب انتخاب سے صفر لیا جاسکتا ہے۔

$$و = \sqrt{\frac{فرو}{م(۲-و)(۲-ع)(۲-ع)}}$$

$$اس طرح چونکہ $\frac{فرا}{فرو} = \frac{\{م + و + \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف)\} \{و - \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف)\}}{\{م + و + \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف)\} \{و - \frac{1}{۲} (۲م - ۲ف)\}}$$$

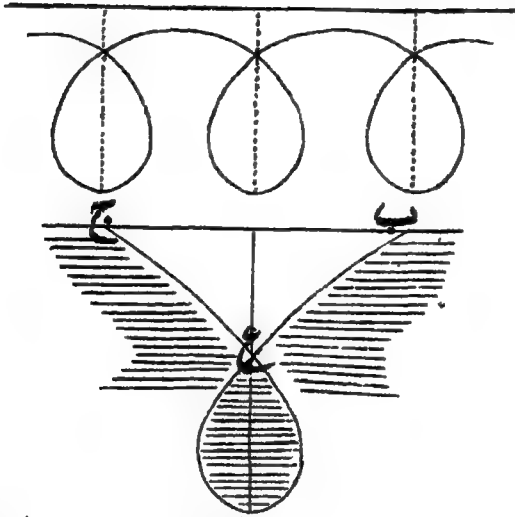
$$و = \frac{فرا}{فرو} - \{م + و + \frac{1}{۲} (۲م + ۲ف)\}$$

جیسے ن ل۔ اس طرح

ر × ن ل = م^۲

اور اس لئے لدنیہ، توبہ کے مماثل ہے۔

۱۳۵۔ لدنیہ لفیفون (convolutions) کی مختلف تعداد پر مشتمل ہو سکتا ہے جس طرح کہ اشکال ذیل سے ظاہر ہے



پانی کی سطح اور اس کے دباؤ کی مناسب ترتیب و تنظیم سے توبہ کے بھی مختلف لطفے ہو سکتے ہیں۔

مثلاً اگر ہم ب ج کو سطح آب تصور کریں اور اس طرح کے انتظامات عمل میں لائیں کہ پانی فضاء و عین بھر دیا جائے اور پانی ب ج ع حصوں کو اوپر وار دبا جائے تو ہمیں ایک لطفے والے لدنیہ کے مماثل توبہ مل جائیگا۔

اگر ہم یہ تصور کریں کہ ب ج، ٹرے ہوئے ڈنڈے کو ب اور ج پر مس کرتا ہے جس کے لئے یہ ضروری ہوگا کہ ڈنڈا لا متناہی طول کا ہو اور اگر گذشتہ کی طرح وپر کے ماس سے انصراف ناپا جائے تو

$$r = \infty \text{ جبکہ } f = 0$$

(۱۴۲)

اور ان قیمتوں کو مساوات (۲) میں استعمال کرنے سے ہمیں $b = 2m$ حاصل ہوتا ہے۔ نیز اگر $a = 1$ اور $s = 1$ جب کہ $a = 1$ ف تو ان کو مساوات (۲) میں مندرج کرنے سے $0 = \text{صن } 6$ پس معلوم ہوا کہ e کی متناظر قیمت k ہے جو ناقصی تفاعل کا حقیقی ربعی دور ہے۔ اور اس سے (۱) اور (۳) سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$l = m \cdot k$$

$$1 = m \{ 2f (حک) - k \}$$

اور

اس لئے ٹوبیہ مساواتوں (۱)، (۲)، (۳) سے حاصل ہوتا ہے بشرطیکہ مستقلوں کے درمیان وہ روابط ہوں جو اوپر بیان ہوئے۔
 ۳۳۔ لدنیہ (Elastica) وہ مسخنی ہے جو ایک لچکدار ڈنڈے کو موڑنے سے پیدا ہوتا ہے یہ ٹوبیہ کے متماثل ہے۔

(۱۴۱)

ڈنڈے کو b و c سے تعبیر کرو اور فرض کرو کہ توازن a b اور c پر کی قوتوں سے جو متضاد سمتوں میں عمل کرتی ہیں برقرار رہتا ہے۔

نقطہ n پر جھکاؤ کا معیار انڈ (Bending moment) انخنا کے متناسب ہے۔ اور اس لئے b n کے توازن پر غور کرنے سے اور نقطہ n کے گرمعیار لینے سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ نقطہ n پر کا انخنا ایسے بدلتا ہے

۱۔ Routh, *Analytical Statics*, II. p. 209, or Kelvin and Tait, *Natural Philosophy*, 591

۲۔ For a full discussion of the *Elastica*, see Kelvin and Tait, *Natural Philosophy*, 611; Love, *The Mathematical Theory of Elasticity*, p. 384, or L. Levy, *Precis Elementaire de la Theorie des Fonctions Elliptiques*, p. 112.

$$م = فرو$$

یا اگر ہم $س = م + ۶$ مستقل
کو زیر ترین نقطہ سے ناپیں تو

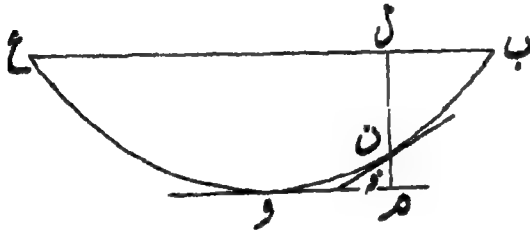
$$س = م + ۶ \dots\dots\dots (۱)$$

$$تب گہرائی ن ل = ف - ۱ = \frac{۲م}{۲}$$

$$م = ۲ \text{ ماہ } ۲ \text{ ماہ جم ذ - جم ص}$$

$$۲م ک ما - ۱ جن ۶$$

$$ف = ۲م ک ص ۶ \dots\dots\dots (۲)$$



$$د م = لا$$

بہر اگر

$$تو \frac{فرا}{فوس} = جم ذ = ۱ - ۲ ک ۲ جن ۶$$

$$۱ = م ک ۱ - ۲ ک ۲ جن ۶ فرو$$

$$یعنی لا = م \{ ۲ ق (خط ۶) - ۶ \} \dots\dots\dots (۳)$$

جہاں ق دوسری قسم کا اقصی تکملہ ہے۔

تھی شرائط یہ ہیں کہ لا، ما، اس سب کے سب معدوم ہو جاتے ہیں جبکہ ۶ = ۰۔

$$ق (خط ۶) = E.(am u)$$

((نوسری شکل دیکھو))

ج تاء ال ل * ل مستقل ہے۔
تو کون ج تاء م سے تفرق کرتے ہیں ان سے ل ل لیتے ہیں مثال ہوگا
 $\frac{م}{ل} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل}$

پس

$$\frac{م}{ل} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل}$$

اللہ = $\frac{م}{ل} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل}$ اگر یہی لکھنا تھا تو "اللہ"

$$\frac{م}{ل} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل}$$

جو تسمیہ کی ذاتی مسلمات ہے۔

(۱۳۴)

اب اس میں جب مے = ک، اللہ جب فے = ک جن ے
رکھے سے جائل ہوگا

$$\frac{م}{ل} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل}$$

$$\frac{م}{ل} = \frac{ل}{ل} = \frac{ل}{ل}$$

لے تسمیہ۔

San = جن

Can = صبح

Dan = طس

مستقل ہے۔

سمت دوع میں دونوں کو ٹھٹھیں کرنے سے گزشتہ دفعہ کی طرح ربط

(۳۹)

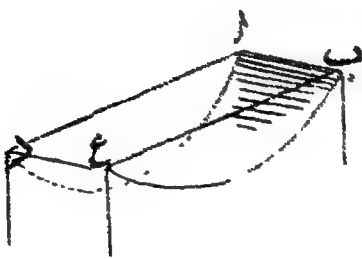
حاصل ہوتا ہے جو سطح کے کسی نقطہ پر ہونے کے عمل التواہیم متاوا، ویاوا درہمن کے درمیان ربط ہے۔

سمت کو مستقل لینے سے مساوات در = سمت سے کسی نقطہ پر کا ویاوا معلوم ہو جائیگا اگر سطح دی ہوئی ہو۔

اگر سیال پر عمل کرنے والی قوتیں دی ہوئی ہوں اور اس لئے د، سیال کے اندر کسی نقطہ کے محدودوں کا منہمہ تفاعل ہو تو ایسی مساوات سے عام سطح کی اختیار کر، دخل کا تعین ہو جائے۔

توبہ اور لرنیہ

۱۳۳۔ توبہ (Lintearis) دو منحنی ہے جو ہمیں کپڑے کے ایک مستطیل کپڑے پر پانی ڈالنے سے پیدا ہوتا ہے جبکہ اس کے سرے افقی طور پر تھامے گئے ہوں اور پانی بالذیل پر سے نکلنے نہ پائے۔



اس طرح اگر کپڑے یا جہلی کے کنارے ا ب، ع د ایک صندوق کے کناروں پر ٹھٹھ کر دئے جائیں اور اگر صندوق ا د، ب ع صندوق پر ٹھٹھ بیٹھے ہوں اور کپڑے پر پانی ڈال دیا جائے اور پھر ا د یا ب ع کے متوازی، ایک انتصابی ستوی

سے کپڑے کو تراشا جائے تو یہ عمودی تراشش توبہ ہوگی۔

دباؤ جو مکہ عماد کی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے کپڑے کا سمت و مستقل ہے اور اس لئے اگر نقطہ ن پر کا نصف قطر اخٹار ہو اور ب ع پانی کی سطح ہو

زیر عمل متوازن ہوگا :- عمادی دباؤ \times $N \times N$ ق ، ماسی قوتیں
ت \times N اور ت \times ق ، اور N ق اور N ق پر کے انتصابی تناؤ
اگر انتصابی سمت میں کوئی تناؤ عمل کریں ۔
پس تو توں کو عماد و ع کی سمت میں تحلیل کرنے سے جو نقطہ وسطی ع تک
کھینچا گیا ہے۔

$$N \times N \times N \times Q = 2 \times N \times N \text{ جب } (N \times Q)$$

$$= 2 \times N \times N \times \frac{N}{Q} \text{ ، اگر نصف قطر ہو ،}$$

۱۳۲۔ اگر کسی شکل کی اسطوانی ملائم سطح میں سیال ساکن ہو تو اسطوانے کے
محور کے علی القواہم تراش کے کسی نقطہ پر کا تناؤ وہی ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ سطح کا ایک عنصر N ق ہے (شکل دفعہ ۱۳۱) فرض کرو کہ ا
پر کام کرنا اٹھاؤ ، ا پر کا تناؤ ت ، ب پر کات + ممت ت اور نقاط ا اور
ب پر کے ماسوں کا درمیانی زاویہ ممت ذ ہے۔

نیز فرض کرو کہ N ق پر کے سیالی دباؤ کی سمت کا میلان د ا کے ساتھ
ممت سا ہے جسکو د ا ، و ب کے درمیان واقع ہونا چاہیئے ۔
ت ب پر کے ماس کی سمت میں قوتوں کو تحلیل کرنے سے

$$(ت + ممت ت) جم ذ - ت = و \times ا ب \text{ جب ممت سا}$$

$$= در ممت ذ جب ممت سا$$

اگر ا پر کا نصف قطر اٹھا رہو ۔

پس بالآخر جب کہ ممت ذ معدوم ہو جائے

$$\frac{فرت}{فرذ} =$$

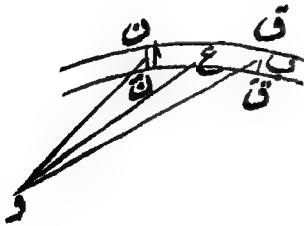
اور چونکہ تراش کے ہر نقطہ پر یہ بات صادق آتی ہے اس لئے نتیجہ نکلتا ہے کہ ت

تناؤ کا ناپ

ایک ملائم اور بے لچک سطح پر غور کرو جو تناؤ کی حالت میں ہے خواہ یہ سطح استداد پذیر ہو یا استداد ناپذیر اور فرض کرو کہ نقطہ ن میں سے گزرنے والے کسی عمادی مستوی سے جو تراش حاصل ہوتی ہے اس کی ایک چھوٹی ٹوس ق ن ق ہے۔ اب اگر خط ق ق سے محدود ہونے والی سطح کے حصوں کے درمیان حاصل عمل ت \times ق ق ہو جو ماسی مستوی میں ق ق پر عمود ہے تو نقطہ ن پر کے تناؤ کا ناپ ت ہوگا۔ یہ الفاظ دیگر نقطہ ن پر کے تناؤ کی شرح ت سے یا وہ قوت جو اس ٹوس کی ایسی تراش پر عمل کریگی جس کا طول اکائی ہے اور جو ہر جگہ ایسی حالت تناؤ میں ہے جیسی کہ ن پر کی سطح۔

عام طور پر سطح کے ان حصوں کے درمیان جن کو ق ق علیحدہ کرتا ہے جو زور عمل کرے گا وہ ق ق کے عمود وار نہیں ہوگا اور اس لئے وہ تناؤ ت \times ق ق اور قوت ت \times ق ق کا حاصل ہوگا جہاں قوت ت \times ق ق مخنی ق ق کے ماس کی سمت میں عمل کرتی ہے اور تہ اسی قسم کی ایک مقدار ہے جیسی کہ ت ہے اور اس کی پیمائش بھی اسی طرح ہوتی ہے۔

۱۳۱۔ ایک ظرف قائم مستد اسطوانے کی شکل کا ہے جس کی مخنی سطح ملائم اور جس کا محور انتصابی ہے۔ اس ظرف میں سیال ہے۔ کسی نقطہ پر کے تناؤ اور دباؤ کے درمیان ربط معلوم کرنا مطلوب ہے۔ (۱۳۸)



فرض کرو کہ سطح کا ایک چھوٹا حصہ ن ق ق ہے جو دو مستویوں کے درمیان جو محور پر عمود وار ہیں اور اسطوانے کے دو کونوں کے درمیان محدود ہے۔

فرض کرو کہ ن ق ق کے کسی نقطہ پر افقی تناؤ ت اور دباؤ د ہے۔ تب سطح کا عنصر ن ق ق ذیل کی قوتوں کے

باب ششم لائم سطحوں کا تناؤ

(۱۲۴)

۱۳۰۔ لائم سطحوں (Flexible surfaces) کے توازن کے عام مسئلہ پر لگراج نے (Mecanique Analytique Tom. I) میں اور نیز زیادہ تفصیل سے پائسن نے (Memoirs de l'Institut, 1812) میں بحث کی ہے۔ ہم اس باب میں خاص قسم کے سوالات پر غور کریں گے جو عام صورت سے پیدا ہوتے ہیں یعنی ایسے سوالات پر جو لائم سطحوں پر سیالات کے عمل سے متعلق ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ سیال کا دباؤ کسی سطح پر جو سیال کے ساتھ تماس رکھتی ہو اس سطح کی عمادی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے فی الحقیقت ہمیں ایسی لائم سطحوں کے توازن پر غور کرنا ہوگا جو عمادی دباؤں اور ان کو محدود کرنے والے خطوط پر کے تناؤں کے زیر عمل ساکن ہوں۔

عمومیت کی خاطر اصطلاح 'لائم سطح' ایسی چیزوں کو تعبیر کرتی ہے جیسے کپڑا اور پتلا کاغذ جن کو موڑنے میں کوئی قابل شدہ مزاحمت محسوس نہیں ہوتی اور جو موڑنے یا حرورٹنے کے بعد اپنی ابتدائی شکل پر لوٹنے کا میلان نہیں رکھتیں مکمل طور پر لائم سطحوں کو خواہ وہ امتداد پذیر (Extensible) ہوں یا امتداد نا پذیر یا بے لچل خیال کیا جاسکے گا۔

دفعات ذیل میں ہم یہ فرض کریں گے کہ لائم سطح کے کسی دو حصوں کے درمیان جو ذرہ عمل کرتا ہے اس کی سمت سطح کے باطنیہ تماس ہے۔

ارتفاع ف کے جواب میں ہے۔
 ۲۸ — اگر کہ ہوائی کی تپش بلندی کے ساتھ یکساں طور پر گھٹتی فرض کی جائے
 تو ثابت کرو کہ سطح بحر سے کسی مقام کا ارتفاع می

$$= \left\{ 1 - \left(\frac{F}{F_0} \right) \right\}$$

جہاں اس مقام پر اور سطح بحر پر بار پیمائے کے ارتفاع بالترتیب ف، ف ہیں اور
 ا، م مستقل ہیں۔

۲۹ — عملی توازن کی حالت میں ثابت کرو کہ کہ ہوائی کی تپش اوپر وار یکساں
 شرح سے گھٹتی جائے گی۔ اس شرح کو سنٹی گریڈ کے درجوں میں فی ۱۰۰ میٹر معلوم
 کرو جبکہ حسب ذیل باتیں معلوم ہوں :-

$$\text{بار پیمائے کا ارتفاع} = 6450$$

$$\text{تپش (مطلق)} = 262 \text{ سنٹی گریڈ}$$

$$\text{ہوا کی کثافت} = 60.129$$

$$\text{بارہ کی کثافت} = 13.240$$

$$\text{نوعی حرارتوں کی نسبت (جہ)} = 1.22$$

$$\text{(س۔ گ، ف نظام میں) -}$$

$$(د + \pi ک) (ف + و لوک (۱ - \frac{ت}{و}) + \frac{ج قی}{و} = -$$

جہاں کہ ہوائی کا دباؤ π ہے۔
 ۲۵۔ ایک کرومی غبارے کا نصف قطر رہے اور اس میں گیس کی کچھ مقدار ہے جسکی کثافت سطح زمین پر کے کرہ ہوائی کے دباؤ دیر نہ ہے۔ اگر غبارہ تناؤ ت کو عین سنبھالنے کے قابل ہو تو ثابت کر دو کہ یہ پھٹ جائے گا اگر اس کی رفتار اتنی ہو جائے جتنی

$$\frac{و}{۲} = \frac{ت}{۲} + م لوک (۱ - \frac{ت}{دیر})$$

سے حاصل ہوتی ہے۔ جہاں غبارہ کی حرکت کی مزاحمت نظر انداز کر دی گئی ہے۔

۲۶۔ یہ فرض کر کے کہ کرہ ہوائی پوری فضا میں پھیلا ہوا ہے اور اس کی قشر ہر جگہ یکساں ہے ثابت کر دو کہ مرجع کی سطح پر کے کرہ ہوائی کی کثافت کو زمین کی سطح پر کے کرہ ہوائی کی کثافت کے ساتھ تقریباً ۵۶۹ کی نسبت ہوگی۔ یہ دیا گیا ہے کہ مرجع کی کثافت دہی ہے جو زمین کی ہے اور اس کا نصف قطر زمین کے نصف قطر کا نصف ہے اور زمین پر کرہ ہوائی کا دباؤ ۱۰۳۳ گرام فی مربع سمر ہے اور ہوا کے ایک مکعب سمکیت کا وزن ۰۰۱۲۴۴ گرام ہے۔ زمین کا نصف قطر ۶۳۶۹۸۰۰ میٹر ہے۔

۲۷۔ اگر بار پیمائی درجہ بندی کے بعد ہوا کا ایک خفیف حجم ح پارہ کے اوپر کے خلا میں داخل کیا جائے اور قشر غیر متغیر رہے تو ثابت کرو کہ کسی مشاہدہ شدہ ارتفاع ف کے لئے

$$\frac{ف}{ج} \times \frac{ن}{(۱ - ن) (ف - ف)}$$

کی تصحیح کرنی پڑے گی۔ جہاں تلی کی تراش کا رقبہ $ع$ ، برتن کی تراش کا رقبہ $ج$ اور ج اس ظاہری خلا کا طول ہے جو ناقص بار پیمائی کے دوسرے مشاہدہ شدہ

وجہ سے مخروط پانی میں اس قدر ڈوب جاتا ہے کہ اس کا اس پانی کی سطح میں ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ آبی بار پیمائے کے ارتفاع کو مخروط کے ارتفاع سے وہی نسبت ہے جو $\frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$ کے سے ہے۔

(۲۱) ایک چھوٹے غبارہ میں ہوا ہے اور ۱۰۰ گرین سیسہ اس کے ساتھ بندھا ہوا ہے۔ اس کے تغاض کی وہی کثافت ہے جو پانی کی ہے۔ سیسہ سمیت اس کو پانی میں ڈبوایا گیا ہے۔ اگر پانی کی تپش اور کرہ ہوائی کے دباؤ پر غبارہ میں ایک کلب ایچ ہوا سا سکے تو کتنی گہرائی تک اس کو ڈبونے پڑے گا کہ یہ غیر قائم توازن کے محل میں آجائے جبکہ آبی بار پیمائے کا ارتفاع ۳۳ فٹ ہو اور یہ دیا گیا ہو کہ

ہوا کی کثافت : پانی کی کثافت : سیسہ کی کثافت = ۱ : ۸۰۰ : ۹۱۲۰
(۲۲) ایک یکساں ٹھوس مکائی مناسب اسے اس کا نصف حجم علیحدہ کر کے ایک پیالہ بسایا گیا ہے اس طور پر کہ اس کا اندرونی احاطہ ایک مساوی ہم محور مکائی تھا ہے جس کا اس قبل ذکر مکائی نما کے ماسکے پر ہے۔ پیالہ سیال میں اوپر وار رہا اس اور انتصابی محور کے ساتھ ڈبوایا گیا ہے اور نیچے سے اتنی گیس حلز میں داخل کی گئی ہے کہ اس سیال کی سطح میں اٹھ آتا ہے اب اگر پیالے کے اندرونی احاطہ کی نصف گہرائی تک پانی ہو تو ثابت کرو کہ سیال کی کثافت مکائی نما کی کثافت کا پچھلے ہے۔

(۲۳) اگر ہوا کا دباؤ ایسے بدلے جیسے اس کی کثافت کی (۱ + $\frac{1}{2}$) میں قوت و تپش اور جاذبہ الارض کے تغیرات کو نظر انداز کر کے ثابت کرو کہ کرہ ہوائی کی بلندی متجانس کرہ ہوائی کی بلندی کا (م + ۱) گنا ہوگی۔

(۲۴) وزن کا فشار ایک انتصابی اسطوانہ میں ساکن ہے۔ اسطوانہ کی عمودی تراش ک ہے اور فشار ہوا کے ستون کی گہرائی کے ساتھ ہوا ہے۔ فشار کے ڈنڈے پر ایک انتصابی دھکے پڑتا ہے جس سے فشار بقدر فاصلے کے نیچے چلا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ

(۱۳۶)

جوان مقامات کے ارتفاعوں میں ہے جبکہ ان ارتفاعوں کو فیڈل (Fathoms) میں ناپا جائے۔

(۱۷) — ح اور ح حجم کے دو غیر موصل طرف ہوا سے بھرے ہوئے ہیں، ان میں ہوا کے دباؤ دباؤ ہیں اور پمپیں تاتہ تاتہ ہوا کی ان کمیتوں کو ح حجم کے ایک غیر موصل برتن میں ملا دیا جائے تو آمیزہ کا دباؤ معلوم کرو۔

(۱۸) — دو جوئے جن میں ہوا ہے شیشے کی یکساں سوراخ دار افقی نلی سے ملا دئے گئے ہیں اور اس نلی کے اندر مانع کا ایک بلب، ہوا کو دو مساوی حصوں میں تقسیم کرتا ہے جو فوں کو علی الترتیب ت درجے اور ت درجے تک گرما کر بلب کے مقام میں ہٹاؤ پیدا کیا گیا ہے اگر ہر جوفہ کی تیش کو بقدر ت درجے کے گھٹا دیا جائے تو ثابت کرو کہ بلب میں مزید ہٹاؤ پیدا ہوگا جو ابستہائی ہٹاؤ کے ساتھ

۲ عہ ۲ : ۲ + عہ (ت + ت - ۲ ت)

کی نسبت رکھیں گے جہاں پھیلاؤ کی شرح عہ ہے۔

(۱۹) — ایک لچکدار کردی لفافہ کے گرد ہوا ہے جو بخار سے سیر شدہ ہے۔ اگر اس کی اندرونی ہوا کا دباؤ کرہ ہوائی کے دباؤ کا دو چند ہوتا تو اس کا نصف قطر اپنے اصلی نصف قطر کا دو چند ہو جاتا اور اگر اس کے اندر کرہ ہوائی کے دباؤ پر جتنی ہوا ساکتی ہے اس کے ۷ گنا ہوا ہوتی تو اس کا نصف قطر اپنے اصلی نصف قطر کا سہ چند ہو جاتا۔ یہ فرض کر کے کہ کسی نقطہ پر کا تناؤ ایسے بدلتا ہے جیسے سطح کا پھیلاؤ ثابت کرو کہ ہوا کے دباؤ کا $\frac{1}{3}$ حصہ بخار کے دباؤ کی وجہ سے ہے جو اس میں شامل ہے۔

(۲۰) — ایک مخروطی خول کا زاویہ راس $\frac{\pi}{3}$ اور ارتفاع ف ہے اس میں اس کے وزن کا دو چند پانی ساکتا ہے اس کو اوٹھا کر کے (یعنی جبکہ راس اوپر کی طرف ہو) انتصابی محور کے ساتھ پانی میں ڈبوایا گیا ہے اور پھر پانی کو زادی رفتار (ع ج $\frac{3}{2}$ ف) سے گھمایا گیا ہے۔ گھمانے کی

(۱۲) بار پیا کا ارتفاع ۸۸، ۲۹، ۱۰ اینچ ہے اور پیش پیا نقطہ شبنم پر ہے۔ بار پیا اور پانی کے ایک پیالہ کو قابل میں رکھ دیا گیا ہے جس سے ہوا خارج کر دی گئی ہے۔ اب بار پیا کا ارتفاع ۳۶، ۱۰، ۵ اینچ ہو جاتا ہے۔ کرہ ہوائی کی ہوا کا دیا ہوا حجم جتنی جگہ گھیرتا ہے اُس کو معلوم کرو اگر اس سے اس کے دباؤ اور پیش کی تبدیلی کے بغیر اس کا بخار خارج کر دیا جائے۔

(۱۳) ایک سیدھی نلی ایک سرے پر بند دوسرے پر کھلی، ایک محور کے گرد جو اس کو زاویہ قائمہ پر ملتا ہے مستقل زاویہ رفتار سے گھوم رہی ہے۔ جاذبہ ارض کے عمل کو نظر انداز کر کے نلی کے اندر دینی ہوا کی کثافت کسی نقطہ پر معلوم کرو۔ (۱۴) یکساں سوراخ کی ایک خمیدہ نلی کے باوجود ایک دوسرے کے علی التوا ٹم ہیں۔ یہ نلی اپنے انتصابی بازو کے گرد جس کا سر پانی میں غرق ہے مستقل زاویہ رفتار سے گھوم رہی ہے۔ ثابت کرو کہ انتصابی بازو میں جس ارتفاع تک پانی چڑھیکا وہ ہوگا

$$\frac{\pi}{\text{ج ث}} (1 - \frac{r^2}{R^2})$$

جہاں افقی بازو کا طول R کرہ ہوائی کا دباؤ R^2 پانی کی کثافت θ ہے اور m وہ نسبت ہے جو کرہ ہوائی کے دباؤ کو اس کی کثافت کے ساتھ ہے (۱۵) نصف قطر کی یکساں پتلی دائری نلی جس میں ہوا ہے ایک محور کے گرد زاویہ رفتار سے گھوم رہی ہے یہ محور نلی کے مستوی میں واقع ہے اور اس کا فاصلہ نلی کے مرکز سے J ہے ہوا کے وزن کو نظر انداز کر کے کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر J اس سے کم ہو اور اعظم اور اقل دباؤ θ اور ϕ ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\frac{1}{\theta} = \frac{r^2}{R^2} (1 + \frac{J}{R})$$

(۱۶) اگر دو مقامات کے بار پیا ئی ارتفاعوں کے لوکار توں کے فرق کو ۱۰۰۰ سے ضرب دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس سے تخمیناً وہ فرق حاصل ہوگا

اوپر حرکت کر سکتی ہے اور جس پر ہوا کا دباؤ عمل کرتا ہے۔ نلی کے بالائی حصہ میں خلا ہے۔ سیلابی ستون کے پچھلے اور اوپر کے سروں کے محل میں تغیر معلوم کرو جبکہ کرہ ہوائی کے دباؤ میں دیا ہوا تغیر واقع ہو۔

اگر آہ کے اندر نی کل پارہ کا حجم ۲ ج ۲ ہو جہاں بار پیا کا ارتفاع ۲ ہے تو یہ بھی ثابت کرو کہ اوپر کی سطح پیمائش کے تغیر سے غیر متاثر رہیگی۔

(۹) ایک اسطوانی ظرف غواص پانی میں ڈوبا ہے یہاں تک کہ اس کے کچھ حصہ ح میں ہوا بانی رہتی ہے۔ اس محل میں ہوا کی کچھ مقدار اس میں داخل کی جاتی ہے جس کا حجم کرہ ہوائی کے زیر اثر ۲ ح ہے۔ معلوم کرو کہ غواص کو کتنی گہرائی تک اور نیچے ڈوبنا چاہیے کہ اس کے اندر کی کل ہوا کا حجم اتنا ہی ہو جائے جتنا کہ محل اول میں تھا۔

نیز اس سے لئے شرط دریافت کرو کہ محل اول میں جب ہوا زور سے داخل کی جاتی ہے تو ہوا غواص کے نیچے سے بھرنے لگے نہ پائے۔

(۱۰) ایک ظرف ایسی سطح کی شکل کا ہے جسکی تکوین مکانی کی ایک توس کو جو اس پر ختم ہو جاتی ہے اپنے محور کے گرد گھمانے سے ہوئی ہے۔ اس ظرف کو نیچے دار منہ کے ساتھ پارہ کے ایک برتن میں ڈبویا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ظرف کے اندر کی ہوا کا دباؤ اس فاصلے کے مربع کے تناسب معکوس میں ہوگا جو ظرف کے راس اور اندر نی پارہ کی سطح کے درمیان ہے۔ نیز یہ فرض کر کے کہ ظرف کے محور کے طول کو بار پیا کے ارتفاع کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ۴۵ کو ۶۴ کے ساتھ ہے ظرف کے اندر نی پارہ کی سطح کی گہرائی معلوم کرو جبکہ ظرف عین پوری طرح غرق ہو۔

(۱۱) ایک بے وزن فشارہ ایک انتصابی اسطوانہ میں ٹھیک بیٹھا ہے۔ اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور اس میں ہوا بھری ہوئی ہے۔ ابتداً فشارہ اسطوانہ کے سرے پر ہے۔ اگر پانی فشارہ کے سرے پر آہستہ آہستہ ڈالا جائے تو ثابت کرو کہ پانی کی اوپر کی سطح زیر ترین ہوگی جب کہ پانی کی گہرائی ۴ (ف) ہو۔ ف ہو جہاں آبی بار پیا کا ارتفاع ف ہے اور اسطوانہ کا ارتفاع ۱۔

ایک ناقص بار پیمائش کے متناظر ارتفاع جس میں کچھ ہوا ہے اور ب ہیں —
ثابت کرو کہ اگر ناقص بار پیمائش کا ارتفاع ج ہو تو

$$(ع - و) (ب - ب) (ب - و) (ب)$$

$$(و - ج) (ع - و) - (ب - ج) (ب - ب)$$

کی صحت درکار ہوگی۔

(۶) — اگر تپش پیمائش میں جس کی تپش معلوم کرنا مطلوب ہے جزو ڈبوا جائے اور اس سے تپش کا اظہار ہو جبکہ ہوا کی تپش ہو اور تپش پیمائش کا غیر عرق شدہ حصہ م درجے ہو تو ثابت کرو کہ

$$م (ت - ت)$$

$$۴۸۴۰ + ت - م$$

کی صحت درکار ہوگی اگر تپش پیمائش کے اندرونی پارہ کا پھیلاؤ حرارت کے ا کے لئے $\frac{۱}{۴۸۴۰}$ جو فرض کر لیا گیا ہے کہ ہر حصہ میں پارہ کی تپش اس حصہ کو گھیرنے والی شے کی تپش کے مساوی ہے۔

(۷) ایک بند انتصابی اسطوانہ کے اندر جبکی تراش کا رقبہ ایک ہے و وزن کا ایک فشار ہے ابتداً فشار اسطوانہ کے وسط میں ہے اور اس کے نیچے اور اوپر کی فصائیں شدہ ہوا سے بھری ہوئی ہے۔ اگر فشار کو اپنے حال پر چھوڑ دیا جائے تو وہ ابتدائی ارتفاع کا نصف نیچے آجاتا ہے۔ ثابت کرو کہ سیر شدہ بخار کا تناؤ ۳ د - ۳ ہوگا جہاں کہ ہوائی کا دباؤ ۳ ہے۔ اس عمل کے ابتدا اور اختتام پر تپش وہی فرض کر لی گئی ہے۔

(۸) انتصابی بار پیمائش نلی بنائی گئی ہے جس کے اوپر کا حصہ سرے پر بند کر دیا گیا ہے۔ اس حصہ کی تراش کا رقبہ ۱ ہے۔ بار پیمائش کا درمیانی حصہ ایک جوہ ہے جس کا حجم ب ہے۔ بار پیمائش کے غلط حصہ کی تراش کا رقبہ ج ہے اور اس کا پینڈا کھلا ہوا ہے۔ جوہ تو پارہ سے بھرا ہوا ہے لیکن نلی کے غلطے اور اوپر کے حصوں میں پارہ جزو بھرا ہوا ہے۔ پارہ کو نیچے سے باہر نکل پڑنے سے ایک چکیتی کے ذریعہ روکا گیا ہے جو آزادانہ نیچے

(۱۳۴)

غبارہ کا زیادہ سے زیادہ ارتفاع

$$\frac{\text{فری}}{\text{وقت}} = 0$$

رکھنے سے حاصل ہوگا۔ اور اگر غبارہ کی اوسط کثافت اور ہوا کی اوسط کثافت میں بہت تھوڑا فرق ہو تو $\frac{فری}{وقت}$ چھوٹا ہوگا اور ایک تقریبی قیمت معلوم کی جاسکتی ہے

امثلہ

(۱) - اگر ہوا کی کثافت اضافی ۱۰۱۳ و اور بارہ کی ۵۹ و ۱۳۵ ہو اور اگر بار پیماکا ارتفاع ۳۰ انچ ہو تو ثابت کرو کہ مستقل کم کی قیمت تقریباً ۸۳۴۳۰۰ ہوگی جبکہ طول اور وقت کی اکائیاں فٹ اور ثانیہ ہیں۔

(۲) - ۱۵ و ۵۰ سنتی گریڈ پر خشک ہوا کے ایک لیٹر کا وزن ۱۲۳ و ۱ گرام ہے جبکہ بار پیماکا ارتفاع ۶۰ ملی میٹر ہے۔ اس تپش پر آبائی بخار کا دباؤ بارہ کے ۱۲ و ۶ ملی میٹر ستون کے مساوی ہے اور اس کی کثافت کو اسی تپش اور دباؤ پر کی خشک ہوا کی کثافت کے ساتھ وہی نسبت ہے جو ۵ کو ۸ کے ساتھ ہے۔ ایک لیٹر ہوا کا وزن معلوم کرو جب اس کو مذکورہ بالا تپش اور دباؤ پر آبائی بخار سے سیر شدہ کر دیا جائے۔

(۳) - ایک ناقص بار پیماکے ارتفاع ۲۹ و ۲ اور ۳۰ انچ میں جبکہ صحیح آلہ کے ارتفاع ۲۹ و ۴ اور ۳۰ و ۳۰ ہوتے ہیں۔ ناقص بار پیماک کی ملی کا رد طول معلوم کرو جس کو اس کے اندر کی ہوا ۳۰ انچ دباؤ کے زیر اثر پر کر دے گی۔

(۴) - کہہ ہوائی کی ایک کعب گز ہوا کو ایک ظرف میں جبکہ حجم ایک کعب فٹ ہے پکڑا گیا ہے۔ بار پیماکا ارتفاع ۳۰ ہے۔ جمع شدہ کثافت کا عدد صحیح ناپ تقریباً معلوم کرو جبکہ بارہ کی کثافت اضافی بلحاظ پانی کے ۱۳ و ۵۹۶ ہے اور پانی کے ایک کعب انچ کا وزن ۲۵ و ۲۵ گزین ہے۔

(۵) - ایک بالکل صحیح سیلابی بار پیماکے ارتفاع ۵ و اور ۶ و میں جبکہ

$$\frac{1}{1+Y} = \frac{\pi - \text{ج ث ی}}{\pi}$$

یا $\text{ج} = \text{گ} - 1$

(۲) ایک عبارتہ کی حرکت معلوم کرنا مطلوب ہے یہ فرض کر کے کہ کسی محل میں اس کی ہٹائی ہوئی ہوا کی کیت متجانس ہے اور اثنائے حرکت میں پش مستقل رہتی ہے۔

فرض کرو کہ عبارتہ کی کیت کے مرکز کا ارتفاع ج اور اس کی کیت ک ہے۔ اس کا حجم ج اور ی ارتفاع پر ہوا کی کثافت ث ہے۔ تب وہ مساوات جس سے حرکت کا تعین ہوتا ہے یہ ہوگی

$$\text{ک} = \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \frac{\text{ج ث ی}}{\text{ج ث ح} - \text{ک ج}}$$

$$\text{جہاں} \quad \text{ج} = \frac{\text{ر}}{\text{ج} + \text{ر}}$$

لیکن مساوات فرد = ج ث فری اور $\text{د} = \text{م ث}$ سے ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ج ری}}{\text{ج ری} + \text{م}(\text{ج} + \text{ر})} = \text{د}$$

اور اس لئے

$$\text{ک} = \frac{\text{فری}}{\text{فرت}} = \frac{\pi \text{ ح ج ر}}{\text{م}(\text{ج} + \text{ر})} - \frac{\text{ج ری}}{\text{م}(\text{ج} + \text{ر})} - \text{ک ج} = \frac{\text{ر}}{\text{ج} + \text{ر}}$$

(۱۳۳) جس میں $\text{ک} = \text{ث ح ر}$ رکھنے سے اور $\frac{\text{فری}}{\text{فرت}}$ سے ضرب دیکر تکمیل کرنے سے۔

$$\text{ث} = \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} \right) = \text{ب} - \pi \text{ ر} = \frac{\text{ج ری}}{\text{م}(\text{ج} + \text{ر})} + \frac{\text{ج ری}}{\text{م}(\text{ج} + \text{ر})} - \frac{\text{ج ری}}{\text{م}(\text{ج} + \text{ر})}$$

ابتدائی شرائط سے $\text{ب} = 0$ ۔ $\text{ب} = \pi \text{ ر} + \frac{\text{ج ری}}{\text{م}(\text{ج} + \text{ر})}$

$$\therefore \text{ث} = \left(\frac{\text{فری}}{\text{فرت}} \right) = \pi \text{ ر} - 1 - \frac{\text{ج ری}}{\text{م}(\text{ج} + \text{ر})} - \frac{\text{ج ری}}{\text{م}(\text{ج} + \text{ر})}$$

(۱۴۲)

۱۲۹۔ ذیل کی دو مثالوں سے باب ہذا کے اصولوں کی توضیح ہوتی ہے۔
 (۱) ایک بے وزن فشارہ ایک انتسابی اسطوانہ میں ٹھیک بیٹھا ہے۔ اسطوانہ کا قاعدہ بند ہے اور اس میں ہوا بھری ہوئی ہے۔ فشارہ ابتداً اسطوانہ کی چوٹی یا سرے پر ہے۔ اگر فشارہ کے سرے پر آہستہ آہستہ پانی ڈالا جائے تو معلوم کرو کہ باہر بہ جانے کے پیشتر کتنا پانی ڈالا جاسکتا ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ کا ارتفاع h ہے اور فشارہ جس گہرائی تک نیچے جاتا ہے وہ y ہے۔ تب توازن کے محل میں اسطوانہ کی اندرونی ہوا کا دباؤ $\pi + \rho g y$ ہوگا۔ جہاں کہ ہوائی کا دباؤ π اور پانی کی کثافت ρ ہے۔ لیکن، یہ دباؤ $\pi = \rho h - \rho y$ ۔

$$\pi + \rho g y = \frac{\rho h}{1}$$

فرض کرو کہ آبی بار پیماس کا ارتفاع g ہے۔

$$\text{تو } \pi = \rho g$$

$$g = (\rho - \rho_0) (g + y)$$

اور $y = 0$ ، یا $g = \rho g$

اس لئے جب تک کہ اسطوانہ کا ارتفاع g سے بڑا نہ ہو پانی داخل نہیں کیا جاسکتا۔ کیونکہ بالفرض اگر فشارہ کو نیچے دبا کر بھی اس پر پانی ڈالا جائے تو نیچے کی ہوا کا دباؤ فشارہ کو اٹھا دیگا۔

منفی حل کو، جبکہ $g > 0$ ، یوں خیال کیا جاسکتا ہے کہ یہ ایک مختلف سوال کا حل ہے جس سے یہی جبری مساوات قائم ہوتی ہے۔ فرض کرو کہ اسطوانہ فشارہ کے اوپر بڑھایا گیا ہے اور فشارہ کو ایک ایسی قوت سے بقدری F صمد کے اوپر اٹھانا مقصود ہے جو اس پانی کے وزن کے مساوی ہے جو اس اسطوانہ میں y ارتفاع تک بھرا جاسکتا ہے۔ اس سے مساوات پیدا ہوتی ہے

یازیان کے بغیر آپس میں تبدیل کروایا جائے تو وہ صرف دباؤ کثافت اور تپش کا تبادلہ کریں گے اور بحقیقت مجموعی کوئی تبدیلی نہ ہوگی۔ اس لئے اس صورت میں مذکورہ بالا مساواتیں ہو جائیں گی

فرد = ج ٹ فری (۱)

د = م ٹ ہ اور د = ل ٹ ت
جہاں می ارتفاع پر مطلق تپش کو تپش کہتا ہے۔

م ج ٹ ہ = ۲ فرٹ = ج فری

اور تکمل سے $\frac{۱}{ج} = \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ل}$ ج ی

د $\frac{۱}{ج} = \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ل}$ ج ی

د $\frac{۱}{ج} = \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ل}$ ج ی

جہاں سطح بحر پر مطلق تپش کو تپش کہتا ہے۔

د $\frac{۱}{ج} = \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ل}$ ج ی

اور اگر متجانس کرہ کا ارتفاع ھ ہو تو

ل ٹ ت = د = ج ٹ ہ

د $\frac{۱}{ج} = \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ل}$ ج ی (۲)

اگر مساوات (۱) میں ج کی بجائے ج/ر (ر ی) رکھا جائے تو گوشہ کی طرح تکمل اور اندراج سے ہمیں حاصل ہوگا

(۳) $\frac{۱}{ج} = \frac{۱}{م} - \frac{۱}{ل}$ ج ی

اس طرح عیا کو نظر انداز کرنے سے جو غلطی واقع ہوگی وہ عام طور پر چھوٹی ہوگی۔

خیال کیا جاتا ہے کہ اس قسم کا ضابطہ سب سے پہلے لاپلاس نے بیان کیا ہے۔
۱۲۸۔ یہ بھی معلوم رہے کہ بار پیمائے اندر کے پائے کی پیش گوہم نے دہری مانا ہے جو اس کے گرد کی ہوا کی ہے۔ لیکن بعض صورتوں میں مثلاً جبکہ ہوائی جہاز میں مشاہدات لئے جائیں تو یہ ممکن ہے کہ بار پیمائے ایک ہی مقام پر اتنے عرصہ تک نہ رہے کہ اس کی پیش اس کے گرد کی ہوا کی پیش کے مساوی ہو جائے پادہ کی پیش بہر حال پیش پیمائے کے ذریعہ دریافت ہو سکتی ہے جب اس کے جوہر کو بار پیمائے حوض میں رکھا جائے۔ اس طرح سے پارہ کی جو پیشیں حاصل ہوگی انکو دفعہ (۱۲۵) کی مسادات (۲) میں استعمال کرنا ہوگا۔

۱۲۸-۱۔ حملی توازن۔ متبادل مغرضہ پیش کے حملی توازن کا ہے۔
لارڈ کیلون نے اس کو اس طرح بیان کیا ہے ”جب سیال کے تمام حصے آپس میں آزادانہ تبادلہ کرتے ہوں اور اشتعاع و ایصال کا اثر قابل قدر نہ ہو تو ہم کہتے ہیں کہ سیال کی پیش حملی توازن کی حالت میں ہے“ اس حالت میں یہ بات مستنبط ہوتی ہے کہ اگر مختلف ہموار سطحوں پر کی ہوا کی مساوی کمیتوں کو حرارت تکسب

لے Mekanique Celeste, Livre X, Ch. IV — لاپلاس کا ضابطہ جو دفعہ (۱۲۶)

کے ضابطہ (۲) میں صرف عددی سرور میں اختلاف رکھتا ہے اس موضوع کے متعلق اساسی ضابطہ

Meteorology, 1910

قرار دیا جاتا ہے۔ سر جان مور کی کتاب

کے صفحہ ۱۴۹ میں اسکو درج کیا گیا ہے باہر بیانی تصحیحات کے استعالیٰ ضابطہ کے لئے

طبیعیات کی کسی جدید کتاب کا مطالعہ کرو مثلاً (Chwolson) کی کتاب

(Lehrbuch der Physik, 1902) جلد ۳ صفحہ ۳۴۳ اور جلد اول عددی

کے لئے دیکھو (Observer's Handbook) (جسکو) Meteorological

Office نے ۱۹۰۸ میں شائع کیا۔

Collected papers V. III P. 255

۳ ج ی / ۲ ر کے اضافہ ہو جائے گا۔ اس طرہ ی ارتفاع پر جاذبہ کی قوت
کتاب

$$\frac{3 \text{ ج ی}}{2 \text{ ر}} + \frac{2 \text{ ج ی}}{2(1 + \text{ج ی})}$$

ہوگا۔ (Routh, Analytical Statics II P. 12) یا تقریباً ج {1 - \frac{5 \text{ ی}}{2 \text{ ر}}}

اس صورت میں د کے لئے مساوات حاصل ہوگی

$$\text{فرد} = - \text{ج} = - \left\{ 1 - \frac{5 \text{ ی}}{2 \text{ ر}} \right\} \text{ ت فری}$$

اور اس لئے اگر پخلا مقام سطح بحر پر ہو تو

$$\text{م} (1 + \text{ع ت}) \text{ لوک} \frac{2}{3} = \text{ج ی} (1 - \frac{5 \text{ ی}}{2 \text{ ر}})$$

$$\text{یا } \text{ج ی} = \frac{\text{م} (1 + \text{ع ت})}{\text{ج}} \left(1 + \frac{5 \text{ ی}}{2 \text{ ر}} \right) \text{ لوک} \frac{2}{3}$$

دفعہ (۱۲۵) کی مساوات (۲) کی بجائے ہیں مساوات

$$\frac{2}{3} = \left(1 + \frac{5 \text{ ی}}{2 \text{ ر}} \right) \left(\frac{1 - \text{ط ق ت}}{1 - \text{ط ق ت}} \right)$$

حاصل ہوگی۔ اور ی کے حاصل کرنے کے لئے آخری مساوات دفعہ (۱۲۶)

کی مساوات (۲) میں ۱ + \frac{ج ی}{2 \text{ ر}} کی بجائے ۱ + \frac{5 \text{ ی}}{2 \text{ ر}} درج کرنے سے

حاصل ہوگی۔ یہ معلوم رہے کہ لوک (1 + \frac{5 \text{ ی}}{2 \text{ ر}}) تقریباً ۲ لوک (1 + \frac{ج ی}{2 \text{ ر}}) کے مساوی ہے۔

یہ قابل توجہ ہے کہ اگر ی اور ر کو میٹرڈ میں ناپا جائے تو ج ی

$$= 156 \dots \dots \dots \text{ی تقریباً}$$

جہاں نہ پارو کی کثافت ہے۔

اور $\frac{\text{ٹ}}{\text{م}} = ۱۰۴۶۲$ لینے سے

$$\begin{aligned} \text{م} &= ۱۰۴۶۲ \times ۷۹۰ = ۸۲۵۷۱۸۰ \text{ ج ملی میٹر} \\ &= ۷۹۵۱۵۱۲ \text{ ج میٹر} \end{aligned}$$

اس سے سر $\text{م} / ۹۸۰.۵۶ = ۱۸۳۰.۸$ میٹر ہو جائے گا۔ لیکن ہمیں

آبی بخار کو بالکل نظر انداز کر دیا گیا ہے اور م کی ایسی قیمت جو مشاہدہ کردہ حقائق کے زیادہ مطابق نتیجے پیدا کرتی ہے ۷۹۶۳۵۲ ج ہے جس سے حاصل ہوگا

$$\frac{\text{م}}{۹۸۰.۵۶} = ۱۸۳۳۶ \text{ میٹر}$$

ضابطہ (۴) سے م معلوم کرنے کیلئے اول اس کی تقریبی قیمت مساوات

کے بائیں جانب میں $\frac{\text{م}}{\text{ر}}$ کو نظر انداز کر کے معلوم کرنی چاہیئے۔ پھر اگر اس تقریبی

قیمت کو اس مساوات کے بائیں جانب میں استعمال کیا جائے تو م کی زیادہ صحیح قیمت حاصل ہوگی۔ اس عمل کو بشرط ضرورت پھر دہرایا جاسکتا ہے۔

۱۲۔ دوسری تصحیحات بھی ضروری ہیں جب کہ عملی طور پر بار پیک کے

ذریعہ ارتفاعوں کا ٹھیک ٹھیک معلوم کرنا مطلوب ہو۔ مثلاً م کی قیمت

اس وجہ سے بھی بدلتی ہے کہ دی ہوئی ٹینش اور دباؤ پر آبی بخار کی کثافت

خشک ہوا کی کثافت سے جو انہی حالات کے زیر اثر ہو کم ہوا کرتی ہے اور

آبی بخار کا تناسب خشک ہوا کے ساتھ دو مقامات پر مختلف ہو سکتا ہے۔ (۱۳)

اور بالعموم مختلف ہوتا ہے۔

علامہ ہیں اگر اوپر والا مقام زمین کی سطح مرتفع کے کسی حصہ پر ہو تو زمین

کے اس حصہ کی کشش کو بھی محسوب کرنا چاہیئے جو اس کی اوسط سطح کے اوپر

ہے۔ اس کشش کا اثر یہ ہوگا کہ مقدار $\text{ج} / \text{ر} (1 + \text{ی})$ میں بہت

۱۲۶۔ گرویدہ تحقیقات میں ہم نے سطح زمین کے مختلف حصوں پر جاذبہ ارض کے تغیر کا کوئی لحاظ نہیں کیا ہے۔ زمین کی کروی نمائی شکل اور اپنے محور کے گرد اس کی گردش کی وجہ سے جاذبہ ارض کی قوت کی قیمت مختلف عرض بلد پر مختلف ہوتی ہے اور زمین کے چھلکے کی ساخت کے باعث زمین اور سمندر پر اس کی قیمت مختلف ہوتی ہے اور نیز یہ معلوم کیا گیا ہے کہ بحری چھوٹے جزیروں پر براعظموں کی بہ نسبت اس کی قیمت زیادہ ہوتی ہے۔

چ کی اوسط قیمت کے لئے ایک جدید ضابطہ

ج = ۹۷۸۵۰۴۶ + (۱+۲+۳+...۵) وجب ذ - ۴..... وجب ذ (سمرقانیہ)

یا ج = ۹۸۰.۵۶۴۲ (۱-۰۲۹۴۴) حجم ۲ ف ۴ + ۰۰۰۰۰۰۰۰ حجم ۲ ف ۴ (سمرقانیہ)
 حاصل ہوا ہے جہاں ف عرض بلد ہے اور خط استوا اور عرض بلد ۵۴ پر ج کی
 قیمتیں بالترتیب ۰.۴۶ اور ۹۷۳.۵۶۴۲ ہیں۔

اگر ہم $ج = 4.58$ (۱-۴۴۴۰۰۰ جم ۲) لیں تو می کے لئے
جو آخری جلد ہم نے حاصل کیا ہے وہ ہو جائیگا

$$y = \frac{m(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \left(\text{لوگ } \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \right)$$

$$(14) \dots \dots \dots \{ (\bar{x} - \bar{x})^2 \}$$

ان مضابطوں میں جیسا کہ ہم نے اوپر دیکھا ہے م کی قیمت ہو اسکے آبی بخار کی مقدار پر منحصر ہوتی ہے لیکن اگر ہوا کو خشک فرض کیا جائے تو مضابطہ ہوگا

$$M = (1 + e) T$$
اب اگر ہوا ۱۰ سنی گریڈ تپش پر ہو اور اس کا دباؤ ۷۰ ملی میٹر پارہ کے مساوی ہو تو $M = 7.46$ ج ث

Handbuch der Physik. A. Winkelmann, Leipzig, 1908, p. 479a¹

Figure of the Farth by A. R. Clork and F. R.

نیز و تکیه مضمون

Helmert in the Encycl. Brit. Eleventh Edition

اور گزشتہ کی طرح ہم بت کو مستقل اور ان دو معادلات پر کی پیشوں کے
اوسط کے مساوی مانیں گے۔
مکمل سے

$$م \text{ لوک } د = \frac{1}{1 + عت} \frac{ج}{ر + ی} + م$$

$$اور \quad م \text{ لوک } د = \frac{ج}{ر} \frac{ج}{(ر + ی)(ر + عت)} \dots (۱)$$

فرض کر دو کہ گزشتہ کی طرح پارہ کے مشابہ کردہ ارتفاع فن افٹ اور پیشیں

تہ تہ ہیں۔ تب چونکہ ی ارتفاع پر جاذبہ ارض کی قوت مقدار $\frac{ج}{(ر + ی)^2}$
سے ناپی جاتی ہے اسلئے

$$د = \frac{ج}{(ر + ی)^2} \text{ ثن } (۱ - ط تہ)$$

$$د = \frac{ج}{(ر + ی)^2} \text{ ثن } (۱ - ط تہ)$$

$$د = \frac{ج}{(ر + ی)^2} \frac{۱ - ط تہ}{۱ - ط تہ} \dots (۲)$$

اب چونکہ ط ایک بہت چھوٹا مقدار ہے اسلئے

$$ی - عت = م (۱ + عت) (ر + ی) \left\{ \text{لوک } د + \frac{ج}{ر + ی} - م ط تہ \right\}$$

جہاں $م = \text{لوک } د = ۲۵۹۲۳۳$

اس ضابطہ سے اگر ی معلوم ہو تو ی کی قیمت محسوب کی جا سکتی ہے۔ اگر خیلا
مقام سطح بحر کے قریب واقع ہو تو ی = ۰ اور

$$ی = م (۱ + عت) \left(\frac{ج}{ر} + \frac{ج}{ر + ی} \right) - م ط تہ \dots (۳)$$

حی - ی = $\frac{م}{ج} \left\{ 1 + \frac{1}{4} ع (ت + ت) \right\}$ لک { (۱ - ط ت) } (۲) ...
 ۱۲۵ — لیکن اگر سطح زمین کے اوپر ارتفاع کافی زیادہ ہوں تو یہ ضروری ہے کہ زمین کے مرکز سے مختلف فاصلوں پر جاذبہ ارض کے تغیر کو بھی ملحوظ رکھا جائے۔ اس لئے ہم زیادہ صحیح ضابطہ کی تلاش کرتے ہیں۔
 فرض کرو کہ سطح بحر پر جاذبہ ارض کا ناپ ج ہے اور زمین کا نصف قطر ہے تو ارتفاع ی پر تجاؤ بی توت

$$\frac{ج}{(ج + ر)^2}$$

سے ناپی جائیگی۔ اور توازن کی مساوات ہوگی

$$فرد = ج - (ج + ر)^2 ث فری$$

نیز ہم جانتے ہیں کہ $د = م ث$ (۱ + ع ت) اور یہاں یہ دیکھ لیتا ضروری ہے کہ د درحقیقت ہوا کے دباؤ اور آبی بخار (جو ہوا میں شامل ہے) کے دباؤ کا مجموعہ ہے۔

پس اگر آبی بخار کی کثافت ث ہو تو ذیل کی شکل کی دو مقداروں کا مجموعہ ہوگا

$$م ث (۱ + ع ت) + م ث (۱ + ع ت)$$

اور اس لئے مساوات ۱۲ میں مقدار م ث درحقیقت دو مقداروں م ث (۱۲۸)

م ث کا مجموعہ ہے جو علی الترتیب ہوا اور آبی بخار کے جواب میں ہیں۔ اوپر کی دو مساواتوں سے ہمیں حاصل ہوگا

$$فرد = \frac{1}{ج + ع ت} \frac{ج}{(ج + ر)^2} ث فری$$

لے پوری صحت کے لحاظ سے یہ بہتر ہوگا کہ م ث کی بجائے م ث لکھا جائے جہاں ث خالص ہوا کی کثافت ہے۔

اول فرض کر دیتے ہیں کہ پیش مستقل ہے اور ہی ارتفاع پر دباؤ اور کثافت د، ث سے تعمیر ہوتے ہیں اور ہی ارتفاع پر ان کی قیمتیں د، ث ہیں۔ تب توازن کی مساواتیں ہوں گی

$$\text{فرد} = - ج \text{ ث فری}$$

$$\text{اور} \quad \frac{د}{ث} = \frac{ج}{ث} = م$$

$$\text{م لوک د} = م - ج ی$$

$$\text{لوک} \frac{د}{ث} = \frac{ج}{م} (ی - ی)$$

(۱۲۷) نیز اگر ف، ث سے دو مقامات پر کے بار پیاؤں کے ارتفاع تعمیر ہوں اور ان مقامات کے ارتفاع ی اور ہی ہوں تو

$$م - ی = ج = م \text{ لوک} \frac{د}{ث} = \frac{ج}{م} \text{ لوک} \frac{د}{ث} \dots (۱)$$

اگر پیش مستقل نہ ہو تو فرض کر دے کہ ان دو مقامات پر پیشیں د، ث ہیں۔ اب اگر ان دو مقامات کی بلندیوں کے درمیان، اوسط یکساں پیش ت = $\frac{۱}{۲}(د + ث)$ کا مفروضہ اختیار کیا جائے تو د اور ث میں ربط د = م ث x (۱ + ع ت) حاصل ہو گا اور مساوات (۱) ہو جائیگی

$$م - ی = ج = م \left\{ ۱ + \frac{۱}{۲} (د + ث) \right\} \text{ لوک} \frac{د}{ث} \dots (۲)$$

اور اگر دونوں مقامات پر بار پیاؤں کے اندرونی پارہ کی ٹپشوں کے فرق کو بھی ملحوظ رکھا جائے تو دفعہ (۱۰۹) سے

$$\frac{د}{ث} = \frac{ف (۱ - ط د)}{ث (۱ - ط د)} ، \text{ جہاں } ط د = ۱۸.۱۸ \dots$$

اور مساوات (۲) ہو جائیگی

مرکز سے ایک خاص فاصلے پر اس کی کشش ہوا کے ذروں کو دائری مداروں میں رکھنے کے ناقابل ہوگی۔ لیکن ذروں کا ان مداروں کو مرہم کرنا ضروری ہے تاکہ اضافی توازن کی حالت قائم رہ سکے۔

خط استوا پر ہر جگہ سائر، $\frac{ج}{۲۸۹}$ کے مساوی ہے جہاں سہ زمین کی دائری رفتار ہے اور اس لئے اسی ارتفاع پر وہ قوت جو ہوا کے ذرہ کیت ک کو اپنے دائری حرکت میں رکھنے کے لئے درکار ہوگا ج (ر + ی) $\frac{ج}{۲۸۹}$ رکے مساوی ہوگی۔ اسی ارتفاع پر زمین کی کشش

$$\frac{ک ج ر}{۲(ی + ر)} =$$

اور اس لئے انتہائی ارتفاع مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

$$\frac{ی + ر}{۲۸۹} = \frac{ر}{۲(ی + ر)}$$

$$یا \quad ی = ر \{ ۱ - \frac{۲}{۲۸۹} \}$$

یعنی ی، ر سے کسی قدر بڑا ہے۔

ممکن ہے کہ یہ ارتفاع اصلی ارتفاع سے بہت زیادہ ہو کیونکہ غباروں میں تجربات کی بنا پر معلوم ہوا ہے کہ اوپر چڑھتے وقت ہوا کی تپش بہت زیادہ سرعت کے ساتھ گھٹتی جاتی ہے اور اس لئے یہ بالکل ممکن ہے کہ ر سے کم ارتفاع پر ہوا بیکسر وی کی وجہ سے مائع میں تبدیل ہو گئی ہو اور اس لئے اسکی بیرونی سطح ایسی صورت میں اسی قسم کی ہوگی جس قسم کی غیر پیکلڈ ایسالیوں کی سطحیں ہوا کرتی ہیں۔

بارہیمائے کے ذریعہ ارتفاعوں کا معلوم کرنا

۱۲۴۔ بارہیمائے کے سیابی ستون کے ارتفاع اور سطح سمندر کے اوپر اس تار کے ارتفاع کے درمیان ربط قائم کرنے وقت ہمیں کرہ ہوائی کی تپش کے متعلق ایک مفروضہ قائم کر لینا چاہیئے۔

لی جائے تو یہ معلوم ہوگا کہ کمیتوں کی یہ نسبت اس نسبت سے کسی قدر کم ہے جو ایک کو دس لاکھ کے ساتھ ملے۔

متجانس کرہ ہوائی کی بلندی

۱۲۳۔ اگر ہوا کے پورے ستون کی ہر جگہ وہی کثافت ہوتی جو زمین کی سطح پر ہے تو اس کے ارتفاع کو ل اور پادہ کے ارتفاع کو ف سے تعبیر کرنے سے حاصل ہوگا

$$F = L$$

جہاں F ہوا کی کثافت ہے۔ یہ معلوم کیا گیا ہے کہ نسبت $F : L$ تقریباً ۱۰۴۶۲ : ۱ ہے اور اس لئے گزشتہ کی طرح F کی قیمت ۱۲۹۵ استعمال کرنے سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ L ۵ میل سے کسی قدر کم ہے۔

کرہ ہوائی کے ارتفاع کی ضروری حد

ظاہر ہے کہ زمین کی سطح سے کچھ فاصلہ پر اس کی کشش گھٹ جاتی ہے اور اس لئے ہوا کی کثافت اور دباؤ گھٹ جاتے ہیں اس طرح نتیجہ بالا حقیقت سے بہت بعید ہے۔ ہر کیفیت ارتفاع کی حد اس بات کو پیش نظر رکھ کر معلوم کیجا سکتی ہے کہ زمین کے

(۱۲۶)

۱۲۴۔ تجربہ کی بنا پر زمین کی اوسط کثافت محسوب کرنے کا سوال اکشر

ذیر بحث رہا ہے۔ جے۔ ایچ۔ پوائنٹنگ کے مضمون Adam's Prize Essay 1893

میں زمین کی اوسط کثافت کی قیمت ۵۴۳۴ و ۵ حاصل کی گئی ہے۔ سی۔ وی۔ ہائینز

(Phil Trans. 1895) میں اور سی۔ براؤن (C. Braun)

Denkschrift d. Math. natur Klasse d. Wiener Akad, 1895

میں اس کو ۵۴۵۵ بتاتے ہیں۔ نیز دیکھو جے۔ ایچ۔ پوائنٹنگ کا مضمون

Gravitation constant and mean density of the Earth, Encycl. Brit, eleventh edition.

استعمال سے جو توانائی داخل کی جاتی ہے وہ حرارت کی مقدار کے متناسب ہوتی ہے
پس اگر حرارت کی اکائی کا جیلی معادل \bar{G} ہو اور گیس کی اکائی کیت میں
حرارت کا اصنافہ \bar{J} ہو جبکہ دباؤ مستقل رہے تو توانائی داخل شدہ ہوگی

$$\bar{G} \times \bar{J} \text{ حرارت}$$

لیکن یہ توانائی کچھ تو دے ہوئے حجم پر تپش کے بڑانے میں صرف ہوتی ہے
اور کچھ اس حجم کے پھیلائے میں۔

$$\therefore \bar{G} \times \bar{J} \text{ حرارت} = \text{دفرح} + \bar{G} \times \bar{J} \text{ حرارت}$$

$$\text{اور} \quad \text{د} \text{ ح} = \text{ل} \text{ ت}$$

$$\therefore \bar{G} (\bar{J} - \text{ج} \text{ ح}) = \text{ل}$$

جس سے ظاہر ہے کہ \bar{J} - $\text{ج} \text{ ح}$ مستقل ہے۔
ہم اس مساوات سے دفعہ (۱۱۹) کا نتیجہ حاصل کر سکتے ہیں۔
کیونکہ اگر کوئی حرارت نہ پہنچائی جائے تو کوئی توانائی داخل نہیں ہوگی۔

$$\text{اور} \quad \therefore \text{دفرح} + \bar{G} \times \bar{J} \text{ حرارت} = 0$$

$$\text{لیکن} \quad \text{ح} \text{ د} = \text{ل} \text{ ت} = \bar{G} (\bar{J} - \text{ج} \text{ ح}) \text{ ت}$$

$$\therefore \text{دفرح} + \text{ح} \text{ فرد} = \bar{G} (\bar{J} - \text{ج} \text{ ح}) \text{ حرارت}$$

$$\text{اور} \quad \text{دفرح} (\bar{J} - \text{ج} \text{ ح}) + \text{ج} \text{ ح} (\text{دفرح} + \text{ح} \text{ فرد}) = 0$$

$$\text{جس سے} \quad \bar{J} \text{ د} \times \text{دفرح} + \text{ج} \text{ ح} \times \text{ح} \text{ فرد} = 0 \text{ پہلے کی طرح۔}$$

۱۲۱۔ گیس کے حران گذر پچکاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کا معلوم کرنا۔
دفعہ ۱۴ میں ہم نے یہ مان لیا تھا کہ تپش مستقل رہے یا باغفاظ دیگر یہ کہ پچکاؤ

$$\text{اور } \frac{\text{ج د}}{\text{ج ح}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج ح}}$$

اس لئے اگر کوئی حرارت نہ پہنچائی جائے یعنی اگر فرق = ۰ تو

$$\text{ج د} = \frac{\text{ج د}}{\text{ج ح}} + \frac{\text{ج د}}{\text{ج ح}} = ۰$$

$$\text{ج د} \times \text{ج ح} = \text{مستقل ہے}$$

اگر ج د کو ج د کے ساتھ جو نسبت ہے اُس کو مستقل مانیں۔
اگر د ح تغیر پا کر د ح ہو جائیں تو حاصل ہوگا

$$\frac{\text{د ح}}{\text{ج ح}} = \left(\frac{\text{ج ح}}{\text{ج ح}} \right)^{-۱}$$

جہاں ج د = ج د / ج ح ، اور نیز حاصل ہوگا

$$\frac{\text{ت}}{\text{د ح}} = \frac{\text{د ح}}{\text{ج ح}} = \left(\frac{\text{ج ح}}{\text{ج ح}} \right)^{-۱}$$

مساوات د ح = مستقل ، حرکیات ت میں حرنا گذر خطوط کی مساوات
ہے اور یہ گیس کی کسی کمیت کے حجم اور اس کے دباؤ کے درمیانی ربط کو تعبیر
کرتی ہے جبکہ حجم میں تغیر کے وقت نہ کوئی حرارت ضائع ہو اور نہ پہنچائی جائے۔
ہوا کی کسی کمیت کے یکایک پھیلاؤ یا بچکاؤ کی صورت میں بھی مساوات
بالا درست رہتی ہے کیونکہ حرارت کے قابل قدر نقصان یا بیرونی مداخلتوں سے حرارت
کے اکتساب کے لئے کافی وقت نہیں ملتا۔ یہ معلوم ہوگا کہ ربط بالا آواز کے نظریہ
میں بہت زیادہ اہمیت رکھتا ہے۔

۱۲۰۔ ج د - ج ح مستقل - اصول توانائی کی مدد سے یہ بتایا جا سکتا ہے کہ (۱۲۴)

کسی گیس کے لئے ج د اور ج ح کا فرق مستقل ہوتا ہے۔

حرکیات کے ایک کلیہ کی رو سے کسی نظام میں حرارت کے

گیسوں میں دو صورتوں پر غور کرنا ضروری ہے۔ ۱۔ جرم خود مستقل رہے۔
اور گیس کو پھیلنے دیا جائے (۲) جبکہ حجم مستقل رہے۔
ان دو صورتوں میں حرارت فعلی کو ہم رموز ج د اور ج ح سے تعبیر
کریں گے۔

یہ دیکھ لینا اہم ہے کہ ج د ج ح سے بڑا ہے کیونکہ یہی صورت میں
حرارت جو گیس کو دی گئی ہے گیس کے پھیلانے میں بھی کام کرتی ہے اور اس کی
پیش کے بڑھانے میں بھی۔
۱۱۹۔ حرنا گذر پھیلاؤ۔ گیس کی دی ہوئی مقدار کے پکاؤ یا بسط کا اثر ہر
کرنے میں یہ ظاہر ہے کہ حرارت مطلوبہ ج د اور ت کا تعاقب ہوگی اور چونکہ
ج د سے اس نے کسی پھیلاؤ کے لئے حرارت مطلوبہ ج اور د کا تعاقب
ہوگی۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ

$$\text{فرق} = \frac{\text{جنت ق}}{\text{جنت ح}} \text{ فرح} + \frac{\text{جنت ق}}{\text{جنت د}} \text{ فرد}$$

اور بالعموم د = م ت ع ت یا اگر گیس کی دی ہوئی مقدار کی کیت کو کیت
کی اکائی مانا جائے تو

$$\text{ج د} = \text{م ع ت} = \text{ل ت}$$

اگر د باو مستقل ہو تو فرق = ج د فرت

$$\frac{\text{جنت ق}}{\text{جنت ح}} \text{ فرح} = \text{ج د فرت} = \frac{\text{ج د}}{\text{ل}} \text{ د فرح}$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{جنت ق}}{\text{جنت ح}} = \frac{\text{ج د}}{\text{ل}}$$

اگر حجم مستقل ہو تو

$$\frac{\text{جنت ق}}{\text{جنت د}} \text{ فرد} = \text{ج د فرت} = \frac{\text{ج د}}{\text{ل}} \text{ ح فرد}$$

کے متبادل سے سے کرھوائی میں بخار کا دباؤ فوراً معلوم ہو سکتا ہے کیونکہ اگر نقطہ انجم
نکشا اور اس کے متناظر معلوم دباؤ ڈھو تو کسی تپش ت پر جو ت کے اوپر ہے
دباؤ دساوات

$$\frac{t + 1}{t + 1} = \frac{2}{2}$$

سے معلوم ہو جائیگا۔

۱۱۷۔ اگلیں کی تپش اور دباؤ پر پچکا دیا بسط کا اثر۔

تجربہ سے یہ معلوم ہوا ہے کہ اگر ہوا کی کسی مقدار کو جو ایک ایسے ظرف
کے اندر بند ہے جس میں حرارت داخل نہیں ہو سکتی پچکایا جائے تو اس کی
تپش بڑھ جاتی ہے اور یہ کہ اگر ہوا کی کسی مقدار کو خواہ وہ کسی قسم کے ظرف میں
بند ہو یکایک پچکا دیا جائے اس طرح کہ حرارت کو یا ہر پھلنے کا موقع نہ ملے تو اس
صورت میں بھی تپش اسی طرح بڑھ جاتی ہے۔

۱۱۸۔ استعداد حرارت۔ کسی جسم کی استعداد حرارت، حرارت کی وہ مقدار
ہے جو اس کی تپش کو ایک درجہ بڑھا دینے میں مطلوب ہوتی ہے۔

حرارت کی اکائی جو عملاً استعمال ہوتی ہے حرارت کی وہ مقدار ہے جو پانی
کی اکائی کیت کی تپش میں ایک درجہ کا اضافہ پیدا کر دے جبکہ پانی کی تپش
سنٹی گریڈ اور ۴۰ سنٹی گریڈ کے درمیان ہو۔

حرارت نوعی۔ کسی جسم کی حرارت نوعی اس کی کیت کی ایک اکائی کی
استعداد حرارت ہے یا بالفاظ دیگر حرارت نوعی وہ نسبت ہے جو حرارت کی اس
مقدار کو جو جسم کی تپش کو ۱ درجہ بڑھا دینے میں مطلوب ہوتی ہے حرارت کی اس
مقدار کے ساتھ ہو جو مساوی وزن کے پانی کی تپش کو ایک درجہ بڑھا دینے میں
درکار ہوتی ہے۔

اگر حرارت کی مقدار فرق کیت کی ایک اکائی میں فرت تپش کی تبدیلی پیدا
کر دے تو حرارت نوعی کا ناپ $\frac{\text{فرق}}{\text{فرت}}$ ہوگا۔

فضائیں جب تک پانی کی کافی مقدار باقی رہے جس سے بجاب بن سکتی ہے فضا بجاب سے ہمیشہ سیر شدہ ہوگی یعنی فضا میں اتنی بجاب ہوگی جتنی کہ اس تپش پر اس فضا میں رہ سکتی ہے۔ لیکن اگر تپش کو اتنا بڑا دیا جائے کہ تمام پانی بجاب بن جائے تو اس تپش اور اس سے اسٹلے تپشوں کے لئے بجاب کا دباؤ اسی کلیہ کی پابندی کریگا جس کلیہ کی ہوا کا دباؤ پابندی کرتا ہے۔

ہر صورت میں خواہ فضا سیر شدہ ہو یا نہ ہو اگر ہوا کا دباؤ د اور بجاب کا دہ ہو تو آمیزے کا دباؤ د + دہ ہوگا۔

۱۱۶۔ کہ ہوائی میں ہمیشہ آبی بخار موجود ہوتا ہے جس کی مقدار مختلف اوقات پر مختلف ہوتی ہے کبھی کم اور کبھی زیادہ۔ اگر کہ ہوائی کی فضا کا کوئی حصہ بخار سے سیر کر دیا جائے یعنی اگر بخار کی کثافت اس تپش پر جتنی بڑی ہو سکتی ہے اتنی ہو جائے تو تپش کو گھٹانے سے بخار کے کچھ حصہ کی تکلیف ہو جائے گی لیکن اگر اس تپش پر بخار کی کثافت کثافت اعظم نہ ہو تو کوئی تکلیف و قورع پذیر نہ ہوگی جب تک کہ تپش کو اس نقطہ کے نیچے تک نہ گھٹا دیا جائے جس پر فضا میں تکلیف شروع ہو جاتی ہے۔

شبہم کی پیدائش۔ اگر کسی سطح کو جو کہ ہوائی سے تماس رکھتی ہے اتنا سرد کر دیا جائے کہ اس کی تپش اس کے نزدیک کی فضا کے سیر شدہ ہونے کے نقطہ سے نیچے ہو جائے تو آبی بخار کی تکلیف رونما ہوگی اور کثافت بخار سطح پر شبہم کی شکل میں نمودار ہوگا۔ اس لئے زمین پر شبہم کی پیدائش اسکی سطح کے ٹھنڈے ہونے پر منحصر ہے اور یہ عملی طور پر زیادہ سرعت سے اُس وقت ہوتا ہے جبکہ آسمان پر بادل نہ ہوں اور اس لئے اشعاع کے ذریعہ حرارت کا متبادل زیادہ نقصان ہو تا ہو۔

نقطہ شبہم وہ تپش ہے جس پر شبہم ابتداً پیدا ہونا شروع ہوتی ہے۔ اس کا تعین بالراست آسان ہے سے کرنا پرست ہے۔

(۱۲۲) مختلف تپشوں پر جو بخار کو سیر کرنے والی کثافتیں ہیں ان کے جواب میں بخار کا دباؤ بھی کجترہ سے معلوم کر لینا چاہیئے اور اگر ایسا کیا جائے تو نقطہ شبہم

حیمہ = ح دج

۱۱۴۔ دفعات ماسبق کے نتیجے اور کھینے بخارات کی صورت میں اسی طرح صادق آتے ہیں۔ بخارات اور گیسوں کے جیلی خصوصیات میں بلا لحاظ ان کے کیمیائی خصوصیات کے صرف یہ فرق ہے کہ قبل الذکر آسانی کے ساتھ، تپش کی تخفیف سے، مانع میں تبدیل ہو جاتے ہیں اور موزا ذکر کی تکلیف صرف بہت بڑے دباؤ یا انتہائی ٹھنڈک یا دونوں کے ایک ساتھ استعمال سے ہو سکتی ہے۔

۱۱۵۔ بخار۔ اگر ایسی فضا میں جس میں خشک ہوا ہے پانی داخل کیا جائے تو بھاپ فوراً بن جاتی ہے اور یہ معلوم ہوا ہے کہ بھاپ کی کثافت اور دباؤ صرف تپش پر منحصر ہوتے ہیں اور ہوا کی کثافت پر منحصر نہیں ہوتے۔ پس اگر ہوا کو خارج بھی کر دیا جائے تو بھاپ کی کثافت اور دباؤ وہی برقرار رہیں گے۔ اگر تپش میں اضافہ کیا جائے یا فضا میں وسعت پیدا کی جائے تو بھاپ کی مزید مقدار تیار ہو جائے گی۔ لیکن اگر تپش کو گھٹا دیا جائے یا فضا کو کم کر دیا جائے تو بھاپ کا کچھ حصہ کثف ہو جائیگا۔ (۱۲۱)

۱۱۶۔ پوندیصر فیاریٹھ سے نے کاربانک ایسڈ گیس اور دوسری گیسوں کو جن کی تکلیف کے لئے بہت بڑے دباؤ کی ضرورت تھی کثف کرنے میں کامیابی حاصل کی اور اس کے تجربہ کے نتائج سے یہ خیال پیدا ہوا کہ بہت ممکن ہے کہ تمام گیسوں انکثات کے بخارات ہوں۔ اس کی سہج کچھ تائید مشاعر میں ہوئی جبکہ ایم۔ پی۔ کیٹ (M. Pictet) نے اس سال کے اداکل میں ۳۰ کرہ ہوائی کے دباؤ کے زیر عمل آکسیجن کو مانع میں تبدیل کیا اور اسی سال کے ماہ دسمبر میں ایم کیلیٹٹ (M. Cailletet) نے نیتروجن اور ہوا کو مانع میں تبدیل کیا۔ ۱۸۹۳ء میں ادب لوسکی (Wroblewski) نے ہائیڈروجن کو مانع بنایا اور ۱۸۹۹ء میں ڈوار (Dewar) نے عیسو ہائیڈروجن حاصل کی اور اب ہوا اور دوسری مختلف گیسوں مانع کی شکل میں تجارتی اشیاء ہیں۔

ہے ایک دوسرے سے ملا دیا گیا ہے تب آمیزے کا دباؤ وہی د ہوگا اور
تپش غیر متغیر رہے گی۔ اب اگر آمیزے کو حجم ح میں دبا دیا جائے تو اس کا دباؤ
کلیہ بائل کے رو سے د + د ہوگا۔

یہ نتیجہ صریحاً گیسوں کے کسی تعداد کے آمیزے پر صادق آتا ہے۔

۱۱۳۔ دو مختلف گیسوں کے حجم ح ح ہیں اور ان میں کے دباؤ علی الترتیب
د د ہیں۔ ان کو ایک دوسرے سے اس طرح ملا دیا گیا ہے کہ ان کے آمیزے
کا حجم ع ہو جاتا ہے۔ آمیزے کا دباؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

دونوں گیسوں کے دباؤ جبکہ ان کو حجم ع میں محدود کیا جائے علی الترتیب

$$\frac{ح}{د}, \frac{ح}{د}$$

اور اس لئے دفعہ سابق سے آمیزے کا دباؤ

$$\frac{ح}{د} + \frac{ح}{د}$$

ہے اور اگر یہ دباؤ د سے تعبیر کیا جائے تو

$$د = \frac{ح}{د} + \frac{ح}{د}$$

لانے کے پختہ اگر گیسوں کی مطلق تپشیں ت اور ت ہوں اور لانے کے بعد
تپش مطلق ت ہو جائے اور حجم ع تو گیسوں کے دباؤ علی الترتیب ہوں گے

$$\frac{د}{ت} \text{ اور } \frac{د}{ت}$$

پس آمیزے کا دباؤ د ان دو مقداروں کا حاصل جمع ہوگا اور اس لئے

$$\frac{د}{ت} = \frac{د}{ت} + \frac{د}{ت}$$

گیسوں کے کسی تعداد کے آمیزے کی صورت میں

(۱۱۹)

سے حاصل ہوتا ہے $d = m \cdot n \cdot t$ (ت - ت)

$m \cdot n \cdot t$

اگر تپش مطلق ہو۔

چونکہ ت ح مستقل ہے اسلئے د ح / ت بھی مستقل ہے اور یہ کلیہ مطلق
پیمانہ میں دباؤ حجم اور تپش کے ربط کو ظاہر کرتا ہے۔

۱۱۲۔ آمیزے۔ مختلف چمکدار سیالوں کے آمیزے کا دباؤ۔

دو مختلف گیسوں پر غور کرو جو دو ظرفوں میں ہیں جن کے حجم ح اور ح ہیں۔
اور فرض کرو کہ ان کے دباؤ اور تپشیں د اور ت دونوں کے لئے ایک ہی ہیں۔

فرض کرو کہ ان دو ظرف میں الحاق پیدا کیا گیا یا دونوں گیسوں کو ایک
بند ظرف میں جس کا حجم ح + ح ہے منتقل کر دیا گیا ہے۔ ایسی صورت میں جبکہ

ان میں کوئی کیمیائی عمل وقوع پذیر نہیں ہوتا یہ معلوم ہوا ہے کہ دونوں گیسیں علیحدہ
نہیں رہتیں بلکہ ایک دوسرے میں نفوذ کرتی ہیں حتیٰ کہ وہ ایک دوسرے سے
پوری طرح مل جاتی ہیں اور یہ کہ جب توازن قائم ہو جاتا ہے تو آمیزے کے دباؤ اور
تپش دونوں وہی ہوتے ہیں جو پہلے تھے۔

اس اہم تجربہ کی واقعیت سے ہم حسب ذیل مسئلہ اخذ کر سکتے ہیں۔

اگر دو گیسوں کو جن کی تپش وہی ہے ایک ظرف میں جس کا حجم ح ہے ملا دیا
جائے۔ اور اگر ان گیسوں کے دباؤ د اور د ہوں جبکہ ان کو فرداً فرداً حجم
ح والے ظرف میں داخل کیا جائے تو آمیزے کا دباؤ د + د ہوگا۔

فرض کرو کہ دونوں گیسوں کو ایک دوسرے سے جدا کر دیا گیا ہے اور اس گیس
کے حجم میں جس کا دباؤ د ہے تپش کی تبدیلی کے بغیر اتنا تغیر کر دیا گیا ہے
کہ اس کا دباؤ د ہو جاتا ہے۔ تب کلیہ بائیل کی رو سے اس کا حجم ح / د ہوگا۔
اب فرض کرو کہ ان دو گیسوں کو ایک ظرف میں جس کا حجم

$$H + \frac{H}{2} \text{ یا } \frac{H}{2} + H$$

اس طرح چونکہ یکجہد رتوت میں اضافہ فشار کو باہر ڈھکیلنے کا اثر رکھتے ہیں اس لیے
کہ کثافت کی تخفیف سے اور اس لئے متاثر دباؤ کی تخفیف سے توازن برقرار
ہو جائے۔ تب کثیفہ دوم سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{کثافت} (1 + \text{عت})$$

جہاں کثافت نئی کثافت ہے اور $\text{عت} = 3495 \dots$

$$\text{د} = \text{م} \text{ کثافت} (1 + \text{عت})$$

اگر تپش پر اسی سیال کا دباؤ اور کثافت کثافت ہو تو

$$\text{د} = \text{م} \text{ کثافت} (1 + \text{عت})$$

$$\text{اور} \quad \frac{\text{کثافت}}{\text{کثافت}} = \frac{3}{3}$$

تمام اقسام کی گیسوں کے لئے مقدار تقریباً وہی ہوتی ہے، لیکن م کی
قیمت مختلف گیسوں کے لئے مختلف ہوگی۔ اس لئے ہر صورت میں تجربہ کی مدد
سے اس کو معلوم کرنا چاہیے۔

۱۱۱۔ تپش مطلق۔ اگر ہم یہ تصور کریں کہ گیس کی تپش کو اتنا گھٹا دیا گیا ہے
کہ اس کا دباؤ حجم کی تبدیلی کے بغیر معدوم ہو جاتا ہے تو ہم تپش کے مطلق صفر پر
پہنچتے ہیں اور تپش مطلق اس نقطہ سے باقی جاتی ہے۔

یہ مان کر کہ تب اس تپش کو سنٹی گریڈ تپش بنایا پر تعبیر کرتا ہے ہیں مساوات
۱ + عت = ۰ سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{تب} = - \frac{1}{\text{عت}} = - 273$$

فاران ہائیٹ کے بیان میں مطلق صفر - ۲۷۳ ہوگا۔

مساواتوں $\text{د} = \text{م} \text{ کثافت} (1 + \text{عت})$

$$\text{م} \text{ کثافت} (1 + \text{عت}) = ۰$$

بار پیا کے اوپر ہوا کے ستون کا ارتفاع گھٹ جاتا ہے اور اس لئے ج پر ہوا کا دباؤ جو اس کے اوپر کی ہوا کے ستون کے وزن کے مساوی ہے گھٹ جاتا ہے اور اس لئے علی میں پارہ نیچے آتا ہے۔

اب اگر پارہ کے ارتفاع اور اس ارتفاع میں جس میں کہ صعود واقع ہوتا ہے ایک ربط معلوم ہو جائے تو ظاہر ہے کہ ایک ہی وقت میں دو مقامات پر بار پیا کی ستونوں کے مشاہدات سے ہم ان مقامات کے ارتفاعوں میں فرق معلوم کر سکتے ہیں۔

اس مقصد کے لئے ہم ایک ضابطہ کی تلاش کرینگے۔ لیکن پہلے ہم ان قوانین کا بیان کر دینا ضروری سمجھتے ہیں جو مختلف تپشوں پر ہوا اور گیوں کے دباؤں میں ضبط پیدا کرتے ہیں اور نیز ان قوانین کا جو گیوں کے آمیزوں سے متعلق ہیں۔

۱۱۰۔ ہم نے پچھلے رسال کے دباؤ کمخافت اور تپش کے درمیان اس رشتہ

$$D = M \cdot T \cdot (1 + e \cdot T)$$

کو پہلے بیان کیا ہے۔ یہ تجربہ کے دو حسب ذیل نتیجوں سے اخذ کیا گیا ہے۔
(۱) اگر تپش مستقل رہے تو ہوا کا دباؤ اس کے حجم کے بالعکس بدلتا ہے۔
(کلیہ بالکل)

(۲) اگر دباؤ مستقل رہے تو ہوا کی کسی کیت کی تپش میں آسنی گریڈ کا اضافہ اس میں اتنا پھیلاؤ پیدا کرتا ہے جو اس کے صفر درجہ سنٹی گریڈ پر کے حجم کا ۳۶۹۵ : ۱ گنا ہوتا ہے۔
(ڈالٹن اور کے لوک کا کلیہ)

اس طرح اگر ہوا کا دباؤ D اور کمخافت T ہو جبکہ تپش صفر ہے تو

$$D = M \cdot T$$

اب فرض کرو کہ تپش کو T تک بڑھایا جاتا ہے جبکہ دباؤ وہی رہتا ہے۔ اس کو سمجھنے کے لئے فرض کرو کہ ہوا ایک اسطوانہ میں ہے جس میں ٹھیک بیٹھنے والا قابل حرکت ایک فشارہ لگا ہوا ہے۔ اور اس فشارہ پر ایک مستقل قوت لگی ہوئی ہے

باہقست

کرہ ہوائی کا دباؤ

(۱۱۶)

۱۰۹۔ اگر ایک شیشی کی نلی تقریباً تین فٹ لمبی جس کا ایک سرابند ہو پارے سے بھردی جائے اور پھر پارہ کے ایک طرف میں اٹاکر اس طرح رکھی جائے کہ اس کا کھلا سرا ڈوبا ہوا رہے تو یہ معلوم ہوگا کہ نلی کے اندر پارہ کچھ اتر گیا ہے اور اس طرح ساکن ہے کہ اس کی اوپر کی سطح برتن کے پارہ کی سطح کے اوپر تقریباً ۲۹ انچ بلند ہے۔ یہ تجربہ جسکو پہلے طرلیلی (Torricelli) نے کیا بار پیمائے کے استعمال کی طرف رہبری کرتا ہے جس سے کہ ہوائی کا دباؤ ناپا جاسکتا ہے۔ بار پیمائے اپنی سادہ ترین شکل میں ایک سیدھی شیشی کی نلی ل ب ہے جس میں پارہ ہوتا ہے اور جس کا پخلا سرا پارہ کے ایک چھوٹے حوض میں ڈوبا ہوا رہتا ہے۔ سرا ل بند ہوتا ہے اور بازو ا ب میں ہوا نہیں ہوتی۔



تجربوں سے یہ معلوم ہوا ہے کہ سطح ج کے اوپر پارہ کی سطح ب کا ارتقاع تقریباً ۲۹ انچ ہوتا ہے اور چونکہ سطح پ پر کوئی دباؤ نہیں ہے اس لئے یہ ظاہر ہے کہ ج پر ہوا کا دباؤ وہ قوت ہے جو پارہ کے ستون ب ق کو تھامے ہوئے ہے۔

ہم نے پہلے یہ بتایا ہے کہ ساکن سیال کا دباؤ افقی مستوی پر کے تمام نقطوں

ہوتی ہے۔ یہ جسم تجربہ سے اس طور پر کر کے محو کائنات ہوتا ہے۔ اگر
اس کو ہندوؤں کے الفاظ میں کہیں تو یہ جسم تجربہ سے کر کے محو کائنات ہوتا ہے۔

۱۱۔ ہم کہتے ہیں کہ ایک گروشی جسم حقیقت میں تیرہ پانچ ہے۔ اگر کسی طرح
میں اتھارویں ہندوؤں کے وقت کے لئے اس طرح کی کائنات

۱۱۔ ف (ت)

پایا جائے جس میں ایک دے ہوئے کا قائل کو تحریر کرتا ہے تو ثابت کر دے کہ
جسم کی نصف انہادی تراض کی مساوات ہوگی

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ (م)} = \frac{1}{2} \text{ (ت)}$$

۱۲۔ ایک کسٹاں قائل کی دھند پر عمود وار تراض ہر جگہ متساوی رہا۔ قائل
مثبت ہے جس کا نصف ذادیہ راس میں ہے۔ اور قاعدہ یہ ہے کہ کسی دھند
کی سطح میں ثابت کر دی گئی ہے اور قائل اپنے سے دو چند کائنات کو جس کے قائل
میں تیرہ پانچ ہے۔ پھر اس کو راس کے گرد ایک میخیز ذادیہ ط میں نیچے بٹھا دیا گیا ہے
ثابت کر دے کہ اپنے ابتدائی محل پر لوٹ آئے کے لئے جو وقت درکار ہو گا وہ تقریباً
یہ ہوگا

$$\frac{1}{2} \text{ (م)} = \frac{1}{2} \text{ (ت)}$$

۱۳۔ جا (ت) کا قائل کو تحریر کرتا ہے۔ مترجم

توابع اور مخروط کی کٹافٹوں میں نسبت معلوم کرو جبکہ توازن تعدیلی ہو۔
 اگر محور کو اتنا نیچے نہ کیا جائے کہ توازن تعدیلی ہو جائے اور پھر مخروط کو
 ضیف طور پر بٹا دیا جائے تو صغیرا ہتزاز کا وقت معلوم کرو۔
 ۱۳۔ ایک چمٹا (Oblate) کرہ ناپوری طرح دو سیالوں میں غرق کر دیا
 گیا ہے۔ نچلے سیال کی کثافت اضافی اور پر کے سیال کی کثافت اضافی کا دو چند ہے۔
 کرہ ناقصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے اور اس کا مرکز سیالوں کی مشترک سطح
 میں ہے۔

یہ فرض کر کے کہ صغیرا ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اولاً ناقصابی سمت میں اور ثانیاً
 اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے افقی خط کے گرد ثابت کر دو کہ صغیرا ہتزازوں
 کے اوقات علی الترتیب ہوں گے

$$۲۲ \sqrt{\frac{2}{g}} \quad \text{اور} \quad ۲۲ \sqrt{\frac{8}{5g} - \frac{b}{c} \times \frac{b+7}{b-1}}$$

جہاں $\frac{b}{c}$ کو بی ناقص کے نصف محور b اور c ہیں۔

۱۴۔ ایک متجانس نفوس جسم ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے
 جیسے گہرائی کا عرق شدہ تیر رہا ہے۔ اس کا مرکز ثقل گ گہرائی پر ہے۔ ثابت کر دو
 کہ صغیرا ناقصابی ہتزاز کا وقت $۲۲ \sqrt{\frac{1}{g}}$ ہے۔

۱۵۔ یکساں موٹائی کا ایک ہتزاز ستادی اساقین قائم الزاویہ مثلث کی شکل
 کا ہے۔ اس کا ایک حادہ زاویہ سیال کی سطح کے نیچے ثابت کر دیا گیا ہے اور یہ
 اس طرح ساکن ہے کہ اس کا وہ ضلع جو عرق نہیں ہے افقی ہے۔ ثابت کر دو کہ
 اس کے اپنے مستوی میں صغیرا ہتزاز کا وقت ہوگا

$$۲۲ \sqrt{\frac{1}{g}}$$

جہاں مثلث کے ہر ضلع کا طول l ہے۔

۱۶۔ ایک جسم کی تکوین منحنی l لا $\frac{1}{4}$ کو محور l کے گرد گھمانے سے

تو بتی پانی کے باہر اٹھ کر جائیگی اگر د < امثلہ ج/ث لیکن اگر

و > امثلہ ج/ث تو اس کے امتزادات کا وقت ۲۲۲ امثلہ لی/ج ہوگا۔
 ۹ — ایک قائم مخروط انتصابی محور اور نیچے دار راس کے ساتھ سیال میں تیر رہا
 ہے اور اس کے محور کا $\frac{1}{2}$ حصہ غرق ہے۔ مخروط کے وزن کے مساوی ایک
 وزن اس کے قاعدہ پر رکھ دیا گیا ہے جس سے مخروط واپس اٹھنے کے بیشتر
 اتنا ڈوب جاتا ہے کہ اس کا محور پورا غرق ہو جاتا ہے ثابت کرو کہ

$$ن^۳ + ن^۲ + ن = ۷$$

۱۰ — ۲ زاویہ راس کا مخروط و نصف قطر کے اسطوانہ میں اس طرح تیر رہا ہے
 کہ اس کے محور کا طول و غرق ہے۔ اگر اسکو ایک صغیر طول میں انتصا با نیچے ڈیکھ لیا
 دیا جائے تو ثابت کرو کہ اس کے امتزاد کا وقت ہوگا

$$۲۲۲ \left(\frac{۲۸ - ۲۸}{۲۸} \right) \text{ مس } ۲ \text{ (عد) ف}$$

ج ۲۱۳

جہاں ف مخروط کا ارتفاع ہے۔

۱۱ — ایک ظرف گردش مکانی نما کی شکل کا ہے، اس کا محور انتصابی ہے اور
 اس میں مائع کی اتنی مقدار ہے جسکا حجم اسی وتر خاص کے ایک مکانی نما کے قطعہ
 کے حجم کے مساوی ہے جو اس مائع میں تیر رہا ہے۔ اگر اس مکانی نما کو اٹھا لیا
 جائے کہ اس کا راس عین سطح رہو اور اگر چھوڑ دینے پر یہ اپنے محور کے سطح کے
 مساوی گہرائی تک لوٹنے سے قبل غرق ہو جائے تو ثابت کرو کہ
 مائع کی کثافت : مکانی نما کی کثافت :: ۲۸ : ۷

۱۲ — دئے ہوئے زاویہ راس کا ایک ٹھوس مخروط، ایک ایسے محور پر تھما
 گیا ہے جس کے گرد یہ حرکت کر سکتا ہے اور جو مخروط کے قاعدہ کے ایک قطر
 پر منطبق ہوتا ہے۔ اگر محور کو افقی طور پر پکڑا جائے اور اتنا نیچے کیا جائے کہ مخروط
 کے حجم کا $\frac{1}{2}$ نیچے دار راس کے ساتھ ایک متجانس مائع میں غرق ہو جائے

۴۔ ایک مجوف نصف کرہ کو جو ایک افقی قطر کے گرد حرکت کر سکتا ہے سیال سے جزو بھر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ صغیر اہتزاز کا وقت وہی ہوگا جو اُس صورت میں ہوتا جبکہ اس میں سیال نہ ہوتا۔

۵۔ ایک ٹھوس ناقص نما اپنے سے دو چند کثافت نوعی والے مائع میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا چھوٹے سے چھوٹا محور انتصابی ہے چھوٹے انتصابی اہتزاز کا وقت معلوم کرو، نیز دوسرے دو افقی محوروں کے گرد صغیر زاویہ اہتزازات کے اوقات معلوم کرو۔

۶۔ ایک مکعب جس کے کنارے کا طول ۱۲ ہے) سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا مرکز ثقل سیال کی سطح کے نیچے ب گہرائی پر ہے۔ اگر اس میں صغیر ہٹاؤ پیدا کیا جائے اس طرح کہ اس کے دو رخ انتصابی رہیں تو ثابت کرو کہ اس کے صغیر انتصابی اور زاویہ اہتزازات کے اوقات علی الترتیب ہونگے

$$\frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{I}{M}} \quad \text{اور} \quad \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{I}{M}} \quad \text{ج (۳ ب - ۲)}$$

۷۔ ایک اسطوانہ مائع میں انتصابی اہتزازات کر رہا ہے۔ یہ مائع ایک دوسرے اسطوانہ میں ہے جس کا نصف قطر اول الذکر کے نصف قطر کا $\frac{1}{2}$ ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کے محور کا غرق شدہ طول جبکہ وہ سکون کے محل میں ہو

$$2\pi \sqrt{\frac{I}{Mg}} \quad \text{ج (۲ - ۱)}$$

ہوگا جہاں ت ایک پورے اہتزاز کا وقت ہے۔
۸۔ ث کثافت ρ کی ایک موم جی θ کثافت کے ساکن پانی میں انتصاباً تیر رہی ہے اس کو روشن کر دیا گیا اور دیکھا گیا کہ اس کا شعاع پانی کی طرف یکساں رفتار سے اتر رہا ہے اور جی جس رفتار سے جل رہی ہے وہ وہی ثابت کرو کہ

$$v = \frac{c}{n}$$

نیز ثابت کرو کہ اگر جی کو اُس وقت بجھا دیا جائے جبکہ اس کا طول l باقی رہے

ج. ج. {در- لم ج ت + عم} {اج. ج. {در- لم ج ت + عم}

اور اس لئے ان نقطوں کی انتصابی حرکتیں سادہ اہترازوں پر مشتمل ہیں جو قانون رفاص کی پابندی کرتے ہیں۔ ڈوبیل (Duhamel) نے اپنی کتاب 'نصاب جیلی' صفحہ ۱۵۲ (Cours de mecanique, Art 152) میں اس امر کی دریافت کا حوالہ دیتے ہوئے اس کو ایم کوشی (M. Cauchy) کی طرف منسوب کیا ہے۔ مساواتیں (۵) ارتعاش کی طبیعی حقیقتوں کو تعمیر کرتی ہیں۔ اہترازوں کے

ادوار $\frac{1}{2}$ زیادہ آسانی کے ساتھ می = (جم (ق + صد) اور ط =
ب جم (ق + صد) کو مساواتوں (۳) میں مندرج کرنے سے اور نسبت $\frac{1}{2}$ کو نتیجہ سے
ماقط کرنے سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

۱۔ ایک سیّدھا ڈنڈا دئے ہوئے ارتفاع سے پانی کی سطح پر انتصابا گرایا گیا رہے اس کی حرکت دریافت کرو اور اس کے لئے شرط معلوم کرو کہ وہ عین غرق ہو جائے۔
۲۔ ف ارتفاع کا انتصابی اسطوانہ ایک مانع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت اسطوانہ کی کثافت کا دو چند ہے۔ مانع ایک اسطوانی ظرف میں ہے۔ اگر ظرف کا نصف قطر اسطوانہ کے نصف قطر کا دو چند ہو اور اسطوانہ کو خفیف طور پر انتصابا ہٹایا جائے تو ثابت کرو کہ ابتر از کا وقت $\frac{2\pi}{3\sqrt{f}}$ ہو گا۔
۳۔ ایک جسم جسکی سطح کا پخلا حصہ کرومی ہے ایک وزن دار سیال میں تیر رہا ہے ثابت کرو کہ صغیر زاویہ ابتر از کا وقت وہی ہو گا خواہ کیسی متجانس سیال میں تیر سکے۔

$$\frac{فرق^۲}{فرق} - \frac{ج لب}{ح رب} + \frac{ج}{ح رب} \left(\frac{ل}{ح} - ۱ \right) = ط = ۰$$

جن کو کھٹا جاسکتا ہے

$$(۳) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{فرق^۲}{فرق} + ری - ب ن ط = ۰ \\ \frac{فرق^۲}{فرق} - \frac{ج ی}{ب} + ن ط = ۰ \end{array} \right.$$

ان مساواتوں کو تکمیل کرنے کے لئے دوسری مساوات کو لہ سے ضرب دیکر پہلی مساوات میں جمع کرو اور فرض کرو کہ

$$(۴) \dots\dots\dots \frac{ل ن - ب ن}{رب - ل ع} = \frac{ل}{ب}$$

اس طرح حاصل ہوگا

$$فرق^۲ (ری + ل ط) + (ر - ل ع) (ی + ل ط) = ۰$$

اور اگر (۴) کی اصلیں لہ لہ ہوں تو

$$(۵) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} ی + ل ط = ج جم \{ ل ع - ل ب \} ت + ع \\ ی + ل ط = ج جم \{ ل ع - ل ب \} ت + ع \end{array} \right.$$

ان سے ی اور ط پوری طرح معلوم ہو جاتے ہیں۔

شک کی گہرائی اس شکل کے جملہ سے حاصل ہوتی ہے

(۱۱۳)

$$ج + (جم مر ت + ع) + لب جم (م ت + ب)$$

اور اس کی حرکت دو مختلف اهتزازوں پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک قوانین ارتعاش کی پابندی کرتا ہے یہ دونوں اهتزاز صغیر اهتزازات کے ہم وجود ہونے کے

اور ایک فرات $\frac{فرات}{(ی + د + ب ط) = ک ج - (ج ث ح + ج ث ی)}$

$= ج ث ی$

یا $\frac{فرات}{فرات} + ب \frac{فرات}{فرات} = ج \frac{ل}{ح} ی (۱)$

(۱۱۳) ث میں سے گزرنے والے انہی محور کے گرد (جو صدری محور ہے اور ہٹاؤ کے مستوی پر عمود ہے) زاویہ حرکت کو پیش نظر رکھ کر دوسری مساوات حاصل ہوگی۔ ث کے گرد سیالی دباؤ کے میار کو دو حصوں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ ایک تو حصہ ا ف ج کی وجہ سے ہے اور دوسرا ہٹائے ہوئے سیال کے حصہ ج کی وجہ سے۔

سیالی دباؤ کا قبل الذکر حصہ = ج ث ح جو پس مرکز میں سے اوپر وار عمل کرتا ہے، اور موخر الذکر حصہ = ج ث ی جو تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے عمل کرتا ہے۔

ط کو گھٹانے کا میلان رکھنے والی سمت میں معیار

$= ج ث ح \times ث ص جب ط - ج ث ی (ب جم ط - د جب ط)$

$= ج ث (سرا - ا ح) ط - ج ث ی (ب - د ط)$

$= ج ث (سرا - ا ح) ط - ج ث ا ب ی$

جہاں ی اور ط کے حاصل ضرب کو نظر انداز کر دیا گیا ہے

نک: $\frac{سرا}{فرات} = ج ث (سرا - ا ح) ط + ج ث ا ب ی$

$\frac{سرا}{فرات} = ج (سرا - ا ح) ط + ج ل ب ی (۲)$

(۱) اور (۲) مساواتوں سے حاصل ہوتا ہے

$\frac{فرات}{فرات} + ج ا ح (ا + \frac{ب}{سرا}) ی - ج ب (سرا - ا ح) ط =$

کیونکہ ایسی صورت میں ج افقی سمت میں قابل قدر فاصلہ طے کر گیا (یعنی صرف پہلے رتبہ کی صفیہ مقداروں کا لحاظ کرتے ہوئے) اور ہٹائے ہوئے سیال کی مقدار اوپر کی طرح غیر متغیر رہیگی۔

اگر پس مرکز ہر ہو تو ث کے گرد سیالی دباؤ کا معیار

= ج ش ح = مر ث جب ط

اور ط کو ٹکٹانے کی طرف اُل ہوتا ہے جہاں ط وہ زاویہ ہے جو ث ہ انتصابی کے ساتھ آن ت پر بناتا ہے۔

لیکن مر ث = $\frac{مٹا}{ح}$ - و، اگر ہ ث = و

اب چونکہ ث میں سے گزرنے والا افقی محور صدری محور ہے اس لئے

ک مٹا $\frac{فرت}{ط} = - ج ث (مٹا - و ح) ط$

جہاں ط کی اعلیٰ قوتیں نظر انداز کر دی گئی ہیں اور ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد جسم کے جوہر کا معیار ک مٹا ہے۔ یعنی

مٹا $\frac{فرت}{ط} + ج (مٹا - و ح) ط =$

یہ مساوات چھوٹے اتھرنات کو تعبیر کرتی ہے جبکہ مٹا < و ح یعنی جبکہ مر ث کے اوپر واقع ہو اور اتھرنات وقت

۸۲ مٹا $\frac{ح}{ج (مٹا - و ح)}$ میں واقع ہوتے ہیں۔

اگر ہ ث کے نیچے واقع ہو تو اس کی علامت بدل دی جائیگی۔

یہ معلوم رہے کہ قائمیت کے پرکھنے کی جانچ اس نتیجہ سے اخذ ہو سکتی ہے جو

ابھی حاصل کیا گیا۔ اتھرنات کے لئے مٹا - و ح کا ایک مثبت مقدار ہونا ضروری ہے

۱۰۸ — ثانیاً اگر ہ اور ث کو لانے والا خط نقطہ ج میں سے نہ گزرے تو

ایک چھوٹے انتصابی ہٹاؤ پر غور کرو۔ جسم کے چھوٹے حصہ ج ع کو جسے سیال کے باہر اٹھالیا گیا ہے ایک پتلا اسطوانہ خیال کیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ ج ع = ی تو ع ث = ج ث۔ ی اور جسم پر نیچے والے

قوت = جسم کا وزن۔ ہٹاے ہوئے سیال کا وزن

= ج ث ل ی

جہاں تیراؤ کے مستوی کا رقبہ ل ہے۔

(۱۱۰)

$$\therefore \text{کس } \frac{\text{فرت}^2}{\text{ث}} = \frac{\text{ج ث ل ی}}{\text{فرت}}$$

جہاں جسم کی کمیت ک ہے۔

لیکن ک ج = ہٹاے ہوئے سیال کا وزن

= ج ث ج = جسم کے حصہ ج د کا حجم ج ہے۔

اس لئے مساوات

$$\frac{\text{فرت}^2}{\text{فرت}^2} + \frac{\text{ج ل ی}}{\text{ج}} =$$

سے حرکت کا تعین ہوتا ہے۔

اس لئے پورے اهتزاز کا وقت ہوگا

$$\frac{2\pi}{\text{ج}}$$

۱۰۷۔ اب ج کے گرد ایک چھوٹا زادی ہٹاؤ (ع) فرض کرو، تب ث بقدر اُس فاصلہ کے اوپر اٹھینگا جو ع پر منحصر ہوگا اور اس لئے نظر انداز کیا جاسکتا ہے بمقابلہ اُن مقداروں کے جو ع پر منحصر ہوتی ہیں اور پھر اگر جسم کو ساکن فرض کر کے اس کو اپنی حالت پر چھوڑ دیا جائے تو وہ (اس فرض کی بناء پر کہ توازن قائم ہے) ث میں سے گزرنے والے افقی محور کے گرد اهتزاز کرے گا۔

لہذا ابتدائی ہٹاؤ ث کے گرد لیا جائے تو بھی دراصل وہی بات پیدا ہوگی

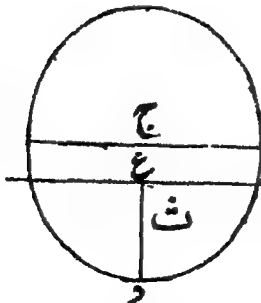
(۱۰۹)

باب ششم

تیرنے والے اجسام کے اہترازات

۱۰۶۔ اگر ایک وزن دار جسم مانع میں قائم توازن کے محل میں تیر رہا ہو اور اسے اس محل سے ذرا ہٹا دیا جائے تو وہ چھوٹے انتصابی اور زاویائی اہترازات کرے گا۔ ظاہر ہے کہ ایسے اہترازات کا سوال ایک ماحر کی سوال ہے اور یہ کہ اگر جسم مانع کی حرکت کو نظر انداز کر دیں تو جسم کے اہترازات کے ادوار کے لئے جو نتائج حاصل ہونگے وہ حقیقی دوروں کے ادائی حدود ہونگے۔ اس کتاب کی وسعت کا جہان تک تعلق ہے ہم صرف یہ فرض کر سکتے ہیں کہ مانع کا جمود نظر انداز کیا گیا ہے۔ علاوہ بریں ہم صرف ایک سادہ صورت پر غور کریں گے۔ ہم فرض کریں گے کہ جسم اپنے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی کے لحاظ سے متشکل ہے اور یہ کہ ابتدائی ہٹاؤ اس مستوی کے متوازی ہے۔

ظاہر ہے کہ جسم کے تمام نقطوں کی بعد کی حرکتیں اس مستوی کے متوازی ہونگی اور اگر توازن قائم ہو تو حرکت چھوٹے انتصابی اور زاویائی اہترازات پر مشتمل ہوگی۔



اول فرض کرو کہ ث اور د میں سے گزرنے والا خط (ج ع د) تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے۔ جب یہ صورت ہو تو انتصابی اور زاویائی ہٹاؤں پر ایک دوسرے سے علیحدہ غور کیا جاسکتا ہے۔

وہ نقطے جو انتصابی ہٹاؤ سے غیر متاثر رہتے ہیں ایک ایسے خط پر واقع ہوتے ہیں
جس کی مساوات ہے

$$\frac{\text{ضالہ}}{\text{وا- (ا-ن) ل}^2/3} + \frac{\text{عاما}}{\text{ب- (ا-ن) ل}^2/3} + \text{ن} = 0$$

جہاں نمونوں کی کثافت کو مائع کی کثافت کے ساتھ نسبت ن ہے۔



۵۹۔ ایک یکساں ٹھوس قائم مستدیر مخروط کی کثافت ρ اور زاویہ α اس
 ۲۔ ہے یہ مخروط ایک سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا اس نیچے کی طرف
 اور اس کا قاعدہ سطح کے اوپر ہے۔ سیال کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی
 کی n دین قوت اور مخروط کے ارتفاع کے مساوی گہرائی پر اس کی کثافت
 ρ ہے۔ ثابت کرو کہ انتصابی نل میں توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$(1+n)(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n}) < \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1+\frac{1}{n})^3 > \frac{\rho}{\rho_0} \quad \text{جم } 3+2n+1$$

نیز یہ کہ مخروط اس صورت میں بھی متوازن ہوگا جبکہ انتصابی کے ساتھ اس کے
 محور کا میلان θ مساوات

$$(1+n)(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n}) < \frac{\rho}{\rho_0}$$

$$= (1+\frac{1}{n})^3 \quad \text{جم } 3+2n+1 \quad \rho \quad \text{جم } 3+2n+1 \quad \rho \quad \text{جم } 3+2n+1$$

سے حاصل ہو۔

۶۰۔ ایک کعب جس کا کنارہ a ہے پانی میں اس طرح ڈیرا ہے کہ اس کے
 دو رخ افقی ہیں اور انتصابی کناروں کا طول l پانی میں غرق ہے۔ اگر کعب کو
 ایک افقی کنارے کے متوازی محور کے گرد ایک محدود زاویہ θ میں گھمایا جائے
 اس طور پر کہ ہٹائے ہوئے پانی کا حجم غیر متغیر ہے اور اوپر کے رخ کا کوئی حصہ
 غرق نہ ہونے پائے تو ثابت کرو کہ کام جو کرنا پڑتا ہے وہ ہے

$$W = \frac{1}{2} \rho g a^3 \sin^2 \theta \quad (1-\cos \theta) \quad \text{جم } 3+2n+1$$

جہاں کعب کا وزن W ہے۔ (دیکھو صفحہ ۱۰۵)

۶۱۔ ایک جہاز کے پیٹے میں پانی ہے اور جہاز سمندر میں تیر رہا ہے۔
 ایک ٹھوس جسم کو زمین پر کی ایک مشین کے ذریعہ تھام کر جہاز کے پیٹے میں لٹکایا
 گیا ہے اس طور پر کہ جسم پانی میں جزو غرق نہ ہوتا ہے اور پانی کا وزن W ہٹاتا
 ہے۔ اس کو پھر اور عموماً غرق کیا گیا ہے تاکہ اس کا صغیر طول ص l اور

ثابت کرو کہ پس مرکز ارتفاع $\frac{۱۲۰}{۱۳}$ می ہے جہاں مکعب کی کمیت تک اور اس کے ایک کنارے کا طول ۱ ہے۔

۵۷۔ قائم مستدیر مخروط کی شکل کا ایک پتلا ظرف جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے انتصابی محور کے ساتھ ایک مانع میں تیر رہا ہے۔ مانع کی کثافت m (۱ + y) ہے جہاں مانع کی سطح کے نیچے گہرائی y ہے اور محور کا غرق شدہ طول z ہے اگر مخروط کے اندر m (۱ + $\frac{z}{۳}$) کثافت کا مانع ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا بشرطیکہ

$$\frac{۴}{۵} \left(\frac{m}{۳} \right) < \frac{۴}{۵} \frac{۱ + \frac{z}{۳}}{۱ + \frac{z}{۵}}$$

۵۸۔ ایک متجانس وزن دار مکانی شکل کے اسطوانے کا ایک طویل حصہ مکونوں کے علی القوائم دو مستویوں سے اور ایسے ایک مستوی سے محدود ہے جو مکونینی مکانی کے محور پر عمود وار ہے۔ یہ اسطوانہ اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محوری مستوی انتصابی ہے اور زیر ترین مکون ایک ظرف کے افقی کمر درے پینڈے کو مس کرتا ہے اس ظرف میں مانع ڈال دیا گیا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی فن دین قوت۔ مانع کی گہرائی g ہے، جسم کا ارتفاع z (کم گ) اور مکونینی مکانی کا وتر خاص ۴ ہے۔ یہ فرض کر کے کہ تیراؤ کی حالت پیدا نہیں ہوتی ثابت کرو کہ قائمیت کے لئے جسم کی کثافت کو مانع کے زیر ترین طبقہ کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ

$$\frac{۴}{۵} \frac{g}{(۱ + \frac{z}{۳})} < \frac{۴}{۵} \frac{g}{(۱ + \frac{z}{۵})}$$

سے کم ہونی چاہیے جبکہ

$$۵g < (۱ + \frac{z}{۵})(۱۰ - \frac{z}{۳}) < (۱ + \frac{z}{۳})$$

جاگہ افعال ہے

جہاں محور کا غرق شدہ طول ف اور کون کا غرق شدہ حصہ ل ہے۔ مقطوعہ کے غرق شدہ رخ کا نصف قطر ہے۔ اور اندرونی و بیرونی دائروں کے خطوط آب کے نصف قطر بہ اور بہ ہیں۔

۵۲۔ ایک ٹھوس مکعب مانع میں انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ تمام زاوی ہٹاؤں کے لئے توازن قائم یا غیر قائم ہو گا۔ بموجب اس کے کہ تیراؤ کے مستوی سے مکعب کی تراش مسدس یا مثلث ہو۔

۵۳۔ ایک ناقص نما ایک مانع میں جس کی کثافت نوعی اس کی کثافت نوعی کا دو چند ہے تیر رہا ہے۔ ایک چھوٹا جنت انتصابی مستوی میں ناقص نما پر عمل کرتا ہے اور اس کو خفیف طور پر ہٹائے ہوئے محل میں رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ جنت کے مستوی اور سیال کی سطح کا خط تقاطع اور وہ محور جس کے گرد ناقص نما گھومتا ہے باہم مزدوج ہونگے بلحاظ اس ماسکی مخروطی کے جو تیراؤ کے مستوی میں ہے۔

۵۴۔ اگر ایک تیر نے والے جسم کا محل غیر قائم ہو تو چونکہ مرکز ثقل دونوں پس مرکزوں کے اوپر واقع ہو گا۔ ثابت کرو کہ جسم میں سطح آب کے مستوی میں ایک خط ثابت کرنے سے اس کے گرد گردش کے لئے قائم محل حاصل ہو سکتا ہے بشرطیکہ یہ خط ایک خاص ناقص کے باہر واقع ہو۔

۵۵۔ ایک ٹھوس متجانس مخروط قائم توازن کی حالت میں ایک سیال میں تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی ہے اور قاعدہ سیال سے باہر ہے۔ سیال کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کی ن دیں قوت۔ ثابت کرو کہ مخروط کا نصف زاویہ راس

$$\text{جسم} \frac{2}{\text{مانع} + \text{ن}} \left| \frac{\text{ن}}{\text{ف}} \right|$$

سے بڑا ہونا چاہیے۔ جہاں مخروط کا ارتفاع ف اور محور کا غرق شدہ طول ہے۔
۵۶۔ ایک وزن وار متجانس مکعب ایک سیال میں یورپی طرح غرق کر دیا گیا ہے۔ سیال کی کثافت = گہرائی کے مکعب کا مرکز مکعب کے دور رخ افقی ہیں۔

۴۸ — ایک دوہرا د خانی جہاز دو مسادی اور متشابہ جہازوں کو ایک دوسرے کے ساتھ طولا ملا کر بنایا گیا ہے، ہر ایک میں ایک ہی طرح کا ہم وزن بوجھ لا دیا گیا ہے۔ اگر علیحدہ جہازوں کی صورت میں پہلو پر لڑ گئے کے لئے مرکز ثقل کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع دہو تو ثابت کرو کہ دوہرے جہاز کی صورت میں یہ ارتفاع

د + $\frac{b^2}{c}$ ہوگا جہاں تیراؤ کے مستوی کا رقبہ (کسی ایک کا حجم غرق شدہ ح اور

وسطی مستویوں کا درمیانی فاصلہ ۲ ب ہے۔

(۱۰۶) ۴۹ — ایک منشوری جسم کے رخ یا پہلو خط آب کے نزدیک انتصابی ہیں اس کو اس طرح لا دیا گیا ہے کہ اس کا مرکز ثقل اس کے پس مرکز پر منطبق ہوتا ہے جب کہ اس کو اس کے کناروں کے متوازی محور کے گرد گھما کر اس میں ہٹاؤ پیدا کیا جائے ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔

۵۰ — ایک مخروط ناقص جس کا نصف زاویہ راس θ ہے ایک مانع میں جھکی کثافت اس کی کثافت کا دو چند ہے تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ یہ اس طرح تیر سکتا ہے کہ اس کا محور انتصابی سمت سے مائل ہو اور بڑے قطر والا سر سیال کے باہر ہو بشرطیکہ

$$\text{جمہ} < (r^2 + r^2) \frac{1}{4} / \frac{1}{4} (r^2 + r^2) \frac{1}{4}$$

جہاں رخوں کے نصف قطر r اور r ہیں۔

۵۱ — پتلے مخروطی خول کا ایک بند مقطوعہ جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے متجانس سیال میں تیر رہا ہے اور اس کے اندر زیادہ وزنی دوسرا متجانس سیال ہے۔ ثابت کرو کہ خواہ کونسا ہی رخ غرق کیا جائے قائمیت کی شرط جبکہ محور انتصابی ہو یہ ہے

$$\frac{(r^2 + r^2 + r^2) \frac{1}{4}}{r^2 (r^2 + r^2) \frac{1}{4} - (r^2 + r^2) \frac{1}{4}} > \frac{r^2}{r^2}$$

و ہے۔ ثابت کرو کہ پیالہ انتصابی کمپوز کے ساتھ قائم توازن میں پانی کے اندر نہیں تیر سکتا اگر اس کا وزن (۶۰۳۹) و اور (۵۸۷۱) و کے درمیان واقع ہو۔
 اگر پیالہ کا وزن $\frac{1}{2}$ و ہو تو اس میں پانی ڈال کر اس کے توازن کو قائم بنا سکتے ہیں تاکہ انتصابی کمپوز کے ساتھ یہ تیرے بشرطیکہ پیالہ میں جو پانی ڈالا جائے اس کا وزن $\frac{1}{2}$ و اور $\frac{1}{2}$ و کے درمیان ہو۔

۴۴ — ایک تختی جس کی کثافت $\frac{1}{2}$ ہے قطع مکافاتی کی شکل کی ہے۔ اس کا وتر خاص ۴ و ہے اور یہ اس سے ۴ فاصلہ پر کے دوہرے سین سے محدود ہے۔ یہ تختی ایک بالغ میں جکی کثافت $\frac{1}{2}$ ہے اس طرح تیر رہی ہے کہ اکی مستوی سطح انتصابی ہے۔ اگر

$$۳ ت (۱-ک) < ۱۰ و$$

$$اور ت (۱-ک) + ۵ و < [۵ ک ت \{ ۳ ت (۱-ک) - ۱۰ و \}] \frac{1}{2}$$

تو ثابت کرو کہ قائم توازن کے دو محل ہیں جن میں محور انتصابی خط کے ساتھ زاویہ

$$۳ ت (۱-ک) < ۱۰ و$$

بناتا ہے۔ جہاں کہ $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ث

۴۵ — ایک جسم دو مائعات میں جن کی کثافتیں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ ہیں آزادانہ تیر رہا ہے۔ آزاد سطح اور مشترک سطح سے جسم کی جو ترشیں حاصل ہوتی ہیں ان کے رقبے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں اور ان کے مرکز ثقل ج اور ج ہیں۔ خفیف ہٹاؤ کے لئے ثابت کرو کہ ہٹاؤ ہوئے سیال کی کمیت وہی رہے گی اگر گردش کا

محور اس انتصابی مستوی میں واقع ہو جو ج ج کو نسبت $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ میں یا $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{2}$ میں تقسیم کرتا ہے بوجہ اس کے کہ مائعات غیر محدود ہیں یا ایک ایسے طرف میں ہیں جس کو مستویوں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ سے تراشنے سے تراشوں کے رقبے $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ہیں۔

سے حاصل ہوگا۔

۴۴ — ف ارتفاع اور ۴ د وتر خاص کا ایک ٹھوس مکانی مناسبتی محل میں ایک مانع کے اندر اس طرح متوازن ہے کہ اس کا راس نیچے وار ہو اور یہ اپنے راس کے گرد جو مانع کی سطح کے نیچے کج گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے حرکت کر سکتا ہے۔ مانع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ ثابت کر دو کہ توازن قائم ہوگا اگر مکانی مناسبت کو اس کے راس پر کے مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ $\frac{ج^۳ + ۴ج^۲}{۳ف}$ سے کم ہو۔ (۱۰۵)

۴۴ — نصف زاویہ راس کا ایک قائم مستدیر ٹھوس مخروط کٹا غرق شدہ ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس اوپر وار اور محور انتصابی ہے۔ اگر مخروط کا ارتفاع ف اور مانع کی سطح کے نیچے اس کے راس کی گہرائی ب ہو تو ثابت کر دو کہ راس سے پس مرکز کا فاصلہ $ف = \frac{۵ب + ۴ف}{۳ب + ۴ف}$ ہے۔

۴۴ — ڈھلے ہوئے لوہے کی نیچیاں موٹی چادر کا ایک اسطوانی میاں جس کا نصف قطر ۱۸ فٹ اور وزن ۷ پونڈ ہے پانی میں سیدھا تیر رہا ہے۔ ثابت کر دو کہ اس کا مرکز ثقل نچلے رخ کے اوپر

$$\frac{۲۹}{۹} + \frac{۷}{۲۱۳۹}$$

سے بلند تر نہیں ہو سکتا۔

تیز ثابت کر دو کہ اس کا وزن خواہ کچھ ہی ہو اس کا پس مرکز نچلے رخ کے اوپر ۷ د ۸ فٹ سے زیادہ بلند رہتا ہے۔

۴۵ — ایک اسطوانی پیالہ یکساں پتلی ڈھلی ہوئی دھات کی چادر سے بنایا گیا ہے۔ پیالہ کی تراش دائری ہے اور اس کا قاعدہ چپٹا اور منہ کھلا ہوا ہے۔ اس کا طول قاعدہ کے نصف قطر کا $\frac{۱}{۲}$ گنا ہے اور پیالہ میں جتنا پانی ساکتا ہے اس کا وزن

کروی ذ (ی) فری - $\frac{1}{2}$ و ذ (ج)

کروی ذ (ی) فری

۳۸ — ایک گروشی مکانی نما، ایک مانع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور اس نیچے وار ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا۔ بموجب اس کے کہ $\frac{1}{2}$ ج $\frac{1}{2}$ (م + و) سے چھوٹا ہو یا بڑا، جہاں محور کا طول 'ج' اس کا طول غرق شدہ و، اور مکونی مکانی کا وتر خاص م ہے۔

۳۹ — ایک چپٹا کرہ نما (Oblate Spheroid) ایک مانع میں جسکی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع نصف غرق شدہ تیر رہا ہے اور اس کا محور انتصابی ہے۔ ثابت کرو کہ مانع کی سطح کے اوپر مرکز ما بعد کا ارتقاع ہے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{b^2}{a^2}$$

۴۰ — ایک نفوس گروشی مکانی نما، اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی، اس نیچے وار اور اس کے مانع کی سطح میں ہے، مانع کی کثافت ی گہرائی پر $\frac{1}{2}$ (و + ی) ہے جہاں مکونی مکانی کا وتر خاص م ہے۔ ثابت کرو کہ اس سے پس مرکز کا فاصلہ $\frac{1}{2}$ و ہے۔

۴۱ — ایک مخروط نیچے وار اس کے ساتھ مانع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ اگر مخروط کی کثافت مانع کی اس کثافت کے مساوی ہو جو مخروط کے ارتقاع کے $\frac{1}{2}$ گہرائی پر ہے تو مخروط کا لاد یہ اس جگہ توازن تعدیلی ہوسادات

$$\text{جم}^2 \text{ع} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{5} \right)$$

سیال کے نیچے غرق ہے پس اس کا مرکز ثقل پس مرکز پر منطبق ہوتا ہے۔ دریافت کرو کہ توازن حقیقت میں قائم ہے یا غیر قائم۔
 ۳۳۔ گردش مکانی نما کی شکل کا ایک مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ اگر مجمو کا مرکز پس مرکز پر منطبق ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا۔
 ۳۴۔ لا ماس کے متوازی ایک مستوی سے سطح ج با = ی (۱ - لا) کو قطع کرنے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے وہ اپنے سے ن گنتی کثافت والے سیال میں تیر رہا ہے۔

اگر کسی انتصابی مستوی میں صغیر زاوی ہٹاؤ کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کرو کہ

$$ن = \frac{۲}{۳} + ۱ + \frac{۵}{۸} \frac{۱}{ج}$$

۳۵۔ ایک متساوی الساقین مثلثی پترا اب ج ایک مائع میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا قاعدہ اب افقی ہے اور مائع کی سطح کے اوپر واقع ہے۔ اگر مائع کی سطح کے نیچے ج کی گہرائی تک ہو تو ج کے اوپر پس مرکز کی بلندی ہے

$$\frac{۱}{۲} \text{ گ قط } \frac{۱}{۲}$$

۳۶۔ ایک ناقصی پترا ایک مائع میں نصف غرق شدہ تیر رہا ہے اس طور پر کہ اس کا عرضی محور (۱۲) انتصابی ہے۔ مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ ثابت کرو کہ پس مرکز کی گہرائی ۳۲ لا/۱۵ ہے۔ جہاں ز، خروج المرکز ہے۔

۳۷۔ نصف قطر کا قائم مستدیر اسطوانہ ایک مائع میں اس طرح ساکن ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس کا طول ج مائع میں غرق ہے اگر ہی گہرائی پر کثافت ف (ی) ہو تو ثابت کرو کہ مرکز مابعد کی گہرائی ہے

کے ایک راج کو محور اعظم کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے۔ یہ جسم اپنے ذریعہ میں ماسکے ایک غرق ہے۔ اگر صغیر زاویہ اہٹاؤں کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کر دو کہ

$$۲ ز + ۴ ز + ۲ ز - ز - ۲ = ۰ \quad (ز = خروج المیزان)$$

۲۹۔ ایک ٹھوس مخروط جس کا زاویہ راس ۲ ط سے کم ہے ایک چکنے سے بے تار کے گرد جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور اس کے محور پر عمود ہے حرکت کر سکتا ہے۔ اگر مار کو مانع کی سطح میں رکھا جائے تو ثابت کر دو کہ مخروط قائم توازن کے محل میں ہو گا۔ جبکہ اس کا محور افق کے ساتھ زاویہ جب ۲ ز جب ۲ ط کا میٹان رکھتا ہو۔

۳۰۔ ثابت کر دو کہ تیرنے والے جسم کو اس کے مرکز ثقل کے گرد چھوٹے زاویہ ط میں سے گھمانے میں یہ کام کرنا پڑتا ہے

$$\frac{1}{2} (۲ ز + ۲ ز - ۲ ط)$$

جہاں جسم اور مٹانے ہوئے مانع کے مرکز ثقل کا درمیانی فاصلہ ط سے اور جسم کے مرکز ثقل اور تیراؤ کے مستوی کے رقبہ کے مرکز ثقل کے درمیان افقی فاصلہ با ہے۔

۳۱۔ ایک مکافی نمایاں جسم کا مرکز خاص ۲ ط سے اور جس کی کمیت کا مرکز راس سے ۲ ط فاصلہ پر ہے وہاں ثقل میں تیر رہا ہے جن کی کثافتیں ۲ اور ۲ ط ہیں اور (۲) ثقل ثابت کر دو کہ جسم کو ایک افقی محور کے گرد چھوٹے زاویہ ط میں گھمانے میں جو کام کرنا پڑتا ہے وہ ہے

$$\frac{1}{2} (۲ ط + ۲ ط - ۲ ط)$$

جہاں ۲ ط محور کے وہ طول ہیں جو سیالوں میں غرق ہیں۔

۳۲۔ ایک قائم الزاویہ متساوی الساقین مثلث سیال میں اس طرح تیر رہا ہے (۱۰۴) کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے قاعدہ افقی ہے، اور اس کے رقبہ کا $\frac{1}{2}$ حصہ

(۱۰۲)

۲۲۔ ایک اسطوانی ظرف اپنے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہے، اور اس کو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہو۔ اگر اس میں پانی ڈال دیا جائے تو ثابت کرو کہ ابتدا میں توازن غیر قائم ہوگا۔ ایسی شرط معلوم کرو کہ کافی پانی ڈالنے سے توازن قائم بنانا ممکن ہو۔

۲۳۔ دئے ہوئے وزن کا ایک مخروطی ظرف اپنے افقی قاعدہ کے ایک قطر کے گرد حرکت کر سکتا ہے، اس کو ایک وزن دار سیال سے جزو بھر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن ہمیشہ قائم ہوگا اگر مخروط کا نصف زاویہ $\alpha > 30^\circ$ لیکن اگر زاویہ اس سے بڑا ہو تو معلوم کرو کہ توازن کب قائم ہوگا اور کب غیر قائم۔

۲۴۔ پانی ایک ظرف میں ہے جس کا قاعدہ افقی ہے۔ اس میں ایک مکانی بنا ہے جس کا اس ظرف کے قاعدہ پر ٹکا ہوا ہے۔ مکانی بنا کو سیال اور قاعدہ جزو جزو تھا میے ہوئے ہیں۔ مکانی بنا کی کثافت نوعی پانی کی کثافت کا $\frac{1}{2}$ ہے اور اس کے محور کے طول کو وتر خاص کے ساتھ نسبت ۹:۸ ہے۔ سیال کی کم سے کم گہرائی معلوم کرو جس کے لئے توازن قائم ہوگا۔

۲۵۔ ایک مکانی بنا پیالہ جس کا وزن W ہے ایک افقی میز پر رکھا ہے اس کے اندر پانی کی کچھ مقدار ہے جس کا وزن N ہے۔ اگر پیالہ اور اس کے اندر کے پانی کے مرکز ثقل کا ارتفاع F ہو تو توازن قائم ہوگا بشرطیکہ مکانی بنا کا وتر خاص

$$< 2(N+1)F$$

۲۶۔ ایک گروشی مجسم انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔ اس کے محور کے ایک ثابت نقطہ پر اوزان رکھنے سے اس کو مختلف گہرائیوں تک ڈبوایا گیا ہے۔ مجسم کی شکل معلوم کرو کہ توازن ہمیشہ تقابلی رہے۔

۲۷۔ ایک ٹھوس مخروط جس کا محور انتصابی اور اس نیچے وارے ایک محور کے گرد جو اس کے تکوینی خط پر منطبق ہوتا ہے حرکت کر سکتا ہے۔ کس گہرائی تک اس نظام کو پانی میں غرق کیا جائے کہ مخروط کا توازن قائم ہو۔

۲۸۔ کنگ کا ایک ٹھوس جسم ایسی سطح سے محدود ہے جس کی تکوین ناقص

توازن قائم بنانے کے لئے اس میں کٹاپانی ڈال دیا جائے۔

۱۷۔ ایک ٹھوس مخروط مانع میں اس طرح رکھ دیا گیا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور اس کا راس نیچے وار برتن کے قاعدہ پر جس میں مانع ہے ٹکا ہوا ہے۔ اگر مانع کی گہرائی مخروط کے ارتفاع کا نصف ہو اور اس کی کثافت مخروط کی کثافت کا چار گنا ہو تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر مخروط کا زاویہ راس ۱۲۰ سے بڑا ہو۔

ٹھوس مخروط کی بجائے اسی ارتفاع کا ایک پتلا مخروطی خول رکھ دیا گیا ہے جس کا زاویہ راس ۹۰ ہے اور جس کے اندر محور کے وسطی نقطہ کی ہوا سطح تک مانع ہے اور اس مانع کی کثافت بیرونی مانع کی کثافت کا نصف ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر خول کا وزن اس کے اندرونی مانع کے وزن کے تین چوتھائی سے کم ہو۔

۱۸۔ ایک اسطوانی ظرف میں جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے پانی ہے۔ اس ظرف کو ایک ثابت کمرہ دے کرہ کے راس پر رکھ دیا گیا ہے اسطورہ کہ اس کے قاعدہ کا مرکز کرہ کو مس کرتا ہے۔ صغیر ہٹاؤ کے لئے قائمیت کی مشرط معلوم کرو۔ اور اگر اس قسم کے ہٹاؤں کے لئے توازن تعدیلی ہو تو ثابت کرو کہ چھوٹے ٹامح دود ہٹاؤں کے لئے یہ توازن غیر قائم ہوگا۔

۱۹۔ ایک گردشی مجسم کی شکل معلوم کرو جو انتصابی محور کے ساتھ تیرتا ہے بطورہ کہ مجسم کے زیر ترین نقطہ سے پس مرکز اور اچھال کے مرکروں کے فاصلوں کے درمیان مستقل نسبت رہتی ہے خواہ مانع کی کثافت کچھ ہی ہو۔

۲۰۔ ایک نصف دائرہ جی اسطوانہ انتصابی محور کے ساتھ ایک مانع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چند ہے ساکن ہے۔ اگر یہ اسطوانہ اُس خط کے گرد حرکت کر سکے جو انتصابی مستوی رخ اور سطح کا خط تقاطع ہے تو قائمیت کی مشرط معلوم کرو۔

۲۱۔ ایک قائم مستدیر مخروط افقی محور کے ساتھ ایک مانع میں جس کی کثافت اس کی کثافت کا دو چند ہے تیرتا ہے۔ اس کے راس کو مانع کی سطح میں ایک ثابت نقطہ کے ساتھ وصل کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ قائمیت کے لئے زاویہ راس کو ۱۲۰ سے کم ہونا چاہیئے۔

کرنے سے اچھال کے مرکز اور پس مرکز کا درمیانی فاصلہ ہمیشہ مستقل رہتا ہے۔
خواہ قطعہ کی بلندی کچھ ہی ہو، گردشیں مجسم کی شکل دریافت کرو۔

۹۔ پانی پارہ پر ساکن ہے اور ایک مخروط اس قدر وزنی ہے کہ جب تک اس کا راس پارہ کے اندر نہ گھس جائے یہ ساکن نہیں رہ سکتا۔ مخروط کی کثافت معلوم کرو تاکہ توازن قائم ہو سکے۔

۱۰۔ اگر تیرنے والا جسم اسطوانہ ہو جس کا محور انتصابی ہے اور جس کی کثافت اصنافی، مانع کی کثافت اصنافی کے ساتھ نسبت اندر رکھتی ہے تو ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا اگر قاعدہ کے نصف قطر اور بلندی کی باہمی نسبت ۲:۱ (۱:۲) سے بڑی ہو۔

۱۱۔ مکافی نما شکل کا یکساں خول انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے اور اس کا تین چوتھائی حصہ پانی کے نیچے غرق رہتا ہے جبکہ اس کو محور کی سطح گہرائی تک ایسے مانع سے بھردیا جائے جس کی کثافت ۵ ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہے۔
۱۲۔ گردشیں مکافی نما کی شکل کے ایک ظرف میں پانی ہے اور یہ ظرف ایک ثابت کھر درے کرہ پر ساکن ہے اس طور پر کہ اس کا راس کرہ کے بلند ترین نقطہ پر ہے۔ توازن کے قائم ہونے کی شرط معلوم کرو۔

۱۳۔ ایک بے وزن اسطوانی خول میں مانع ہے اور یہ خول دوسرے مانع میں تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا سوائے اس صورت کے جبکہ اندرونی مانع کی کثافت کو بیرونی مانع کی کثافت کے ساتھ جو نسبت ہے وہ ایک سے کم ہو اور اس نسبت ثناتہ کے نصف سے بڑی ہو جو اسطوانہ کے نصف قطر کو اندرونی مانع کی گہرائی کے ساتھ ہے۔

۱۴۔ ایک نصف کرہ کی خول کو جس میں مانع ہے ایک ثابت کھر درے کرہ کے راس پر رکھ دیا گیا ہے جس کا قطر خول کے قطر کا دو چندان ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بوجب اس کے کہ خول کا وزن مانع کے دو چندان وزن سے بڑا یا چھوٹا ہو۔
۱۵۔ ایک گردشیں جسم اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا راس نیچے کی طرف ہے۔ اس کی شکل معلوم کرو جبکہ پس مرکز کا مقام مانع کی کثافت پر منحصر ہو۔

۱۶۔ ایک مخروطی خول نیچے وار راس کے ساتھ غیر قائم توازن میں تیر رہا ہے۔

تیراؤ کے مستوی میں واقع چوگا اور اس کا توازن قائم ہوگا بشرطیکہ اس کی کثافت
اسٹائی < $\frac{1}{2}$ -

۴ — ایک مستوی میں دو جہازیں ہیں۔ ایک کا تانہ ۱۰۰ فٹ ہے اور دوسری کا تانہ ۲۰۰ فٹ ہے۔
اوپر اس کی دو حالتوں میں غرق ہے۔ ۱۔ جب کہ اس کے تانہ کے لئے جو دھات
کے عملی اقدار مستوی میں درج ہو تو اس کا تانہ ہوگا اگر تانہ کی کثافت اور
جیاں کی کثافت کے درجہ نسبت میں نسبت ۱:۲ ہے اسے بڑی جہاز ۲۰۰ فٹ
تانہ کا تانہ ہے

۵ — ایک بند مستوی قوت بہت سے ایک چوتھائی بھر دیا گیا ہے۔ اور
مستوی محور کے ساتھ پانی میں سے چوتھائی سے چوتھائی بھر دیا گیا ہے۔ اس کا
وزن اس پانی کے وزن کا ایک چوتھائی ہے جو اس میں سہا سکتا ہے۔ اس کے
پگھلنے سے پہلے اور جد توازن کی نوعیت کے ساتھ تانہ۔ جبکہ پیش کی تبدیلی کی وجہ سے
حجم کی تبدیلی نظر انداز کر دی جائے۔

۶ — ایک ٹھوس جسم دو حصوں میں تقسیم کیا ہے اور دوسری دوسری
رخوں سے محدود ہے اور اپنے سے دو جہاز کثافت کے لحاظ میں غرق ہونے کے ساتھ
تیرا ہوا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن قائم ہوگا یا غیر قائم۔ رشتہ زاویہ اس کا ترتیباً
۱۰۰ سے کم ہو یا زیادہ۔

۷ — ایک استوائی جہاز کی عمومی تراش: ۱۔ اس کے دو مساوی مکافیل
کی دو مساوی خمیں ہیں جو پینڈے پر مشتمل ہیں، پینڈا ان مکافیلوں کا مشترک
راس ہے اور اس طرح جہاز کے پینو بھاؤ پانی کے سطح پر ہے۔ جہاز سیدھا تیرا
ہے اور اس کا پینڈا گ گہرائی پر ہے۔ ثابت کرو کہ پینڈے کے اوپر پس مرکز کا
ارتفاع ہے

گ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$)

۸ — ایک گروٹی مجسم کے کسی قطعہ کو جو قائم تراش سے پیدا ہوتا ہے اس میں غرق

پس قایت کے لئے $\frac{1}{2}$ (ف) (ج-۲) (ف) کو لانا تراش کے جود کے کم سے کم میار سے کم ہونا چاہیئے۔

مزید برآں اگر تراشش دائرہ یا کوئی ایسی شکل ہو جس کے لئے $\frac{1}{2}$ ع = ب، ج =۔ تو توانائی باقیہ ایسے محل میں جس میں محور انتصابی کے ساتھ زاویہ طہ بننا ہو یہ ہوگی

$$\frac{1}{2} \text{ ج}^2 \left(\frac{1}{\text{ب}} - \frac{1}{\text{ا}} \right) + \frac{1}{2} \text{ ج} \text{ ط} \text{ ا} \text{ ف} \text{ (ج-۲) (ف) } + \frac{1}{2} \text{ ع} \text{ ج} \text{ ط}^2$$

ہٹائے ہوئے حجم کو مستقل لینے سے ج = ۰، اس طرح فائل محل میں توازن (۱۰) کے لئے لازماً

$$- \text{ا} \text{ (ج-۲) (ف) } + \text{ع} \text{ (۲ + مس ط) } = ۰$$

جس سے ط کی ایک حقیقی قیمت ملتی ہے جبکہ

$$\frac{1}{2} \text{ ا} \text{ (ج-۲) (ف) } < ۰$$

یعنی جبکہ انتصابی کل غیر قائم ہے۔

امثلہ

۱۔ پانی سے بھاری شے کا ایک برتن ہے جس کو اوڑھنا کر کے پانی کی سطح پر رکھا گیا ہے، اس میں اتنی کافی ہوا ہے کہ وہ تیر سکتا ہے۔ اگر اسکو کچھ فاصلے میں پانی کے اندر ذرا نیچے ڈبکھل دیا جائے تو ثابت کرو کہ وہ توازن کے ایسے محل میں ہوگا جو انتصابی ہٹاؤ کے لئے غیر قائم ہے۔

۲۔ ایک ٹھوس مکافہ نما اپنے محور پر ایک عمود وار ستوی سے محدود ہے۔ اگر یہ تیر رہا ہو اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی ہو اور اس پانی میں غرق ہو تو ہٹائے ہوئے مانع کے مرکز نقل کے اوپر پس مرکز کا ارتقاع و ترخاص کے نصف کے مساوی ہوگا۔

۳۔ ایک مخروط جس کا زاویہ راس ۹۰° ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی ہے اور راس نیچے کی طرف ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا پس مرکز

$$\frac{1}{2} \text{ ح } = \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \text{ فرلا فرلا}$$

$$\frac{1}{2} \text{ ح } = \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ فرلا فرلا}$$

$$\frac{1}{2} \text{ ح } = \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ فرلا فرلا}$$

$$\text{جہاں } \frac{1}{2} \text{ ح } = \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ فرلا فرلا}$$

اور تیکھلے عہد ہی تراش پڑے گئے ہیں۔

نیز اگر جسم کے مرکز ثقل دھ کے عہد ۱، ۲، ۳، ۴ ہوں تو ہم دیکھتے ہیں کہ

$$\text{ح. ط. ج. (ل + م + ب + ن ج) - (ع - ل - م - ا) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ جہل م)}$$

$$\text{اور س = } \frac{1}{2} \text{، اس طرح توانائی بالقوہ ہوگی}$$

$$\frac{1}{2} \text{ ح } = \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ جہل م}$$

مثلاً فرض کرو کہ ۱ = ب = ۰، اس طرح دھ، مرکز ہندسی کے خط دی

پرواقع ہوگا۔ لکھو ح = ۱ جہاں ف انتصابی محل میں دو بنے کی گہرائی ہے

قب توانائی بالقوہ ہوگی

$$\frac{1}{2} \text{ ح } = \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ جہل م}$$

ایسی صورت میں جبکہ اسطوانہ تقریباً انتصابی ہو ہم تقریباً ن = ۱ - ۱/۲ (ل + م) کہتے ہیں۔ اور ل ۱ اور م ۲ کے سر ہو جاتے ہیں

$$\frac{1}{2} \text{ ح } = \frac{1}{2} (ع - ل - م - ا) \frac{1}{2} (ع + ل + م + ا) \text{ جہل م}$$

اب فرض کرو کہ $C = C + C$ اور فرض کرو کہ ہٹائے ہوئے محل میں جسم کے حجم C کے مرکز ہندی کی گہرائی g ہے اس طرح $C = C + g$ جگہ $C + C$ صفا

جہاں صفا $= \frac{C}{s_2} - \frac{C}{s_1}$ بشرطیکہ C چھوٹا ہو۔ توانائی بالنتوہ ہوگی

$$C (n + g) + C \left\{ \frac{C}{s_2} - \frac{C}{s_1} \right\} + \frac{C}{s_2}$$

$$= C (n + g) + C \left(\frac{C}{s_2} - \frac{C}{s_1} \right) + \frac{C}{s_2}$$

$$= C \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right) + \text{مستقل}$$

(۱۰۰) جہاں طاؤس انتصابی فاصلہ کو تعبیر کرتا ہے جو مرکز ثقل اور اچھال کے مرکز کے درمیان ہے۔

۱۰۵۔ مثال۔ ایک اسطوانہ دوسرے اسطوانہ میں میرا ہے۔

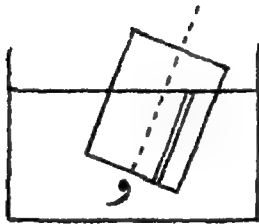
تیرنے والے اسطوانہ کے قاعدہ کے

مرکز ہندی کو مبداء o اور فرض کرو کہ قاعدہ کا رقبہ A ہے۔ نیز فرض کرو کہ مائع کی سطح کے مستوی کی مسادات

$$L + M + N = C$$

ہے جہاں o پر وار انتصابی خط کی

سمتی جیوب التمام L, M, N ہیں۔



تب $C = \frac{A}{s_1}$ اور اگر توازن کے محل میں اچھال کے مرکز کا

مقام h ہو تو خط و h کا ظل اوپر وار انتصابی پر ہوگا

$$C \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \right) + \frac{A}{s_1} (L + M + N) = \text{مستقل}$$

یہ تفسیر لائیں اضافے مع لاک کی وجہ سے پیدا ہو۔

ج ٹ = ۱ مانکر یہ تغیر

= لا لا مع لا - (مع لا - مع ی) ح - (لا - ی) ع مع ی - ع ی مع ی

اب چونکہ
ح = لا لا فزا - ع ی فری

اس لئے لا مع لا = ع مع ی

اس لئے تغیر = ح (مع ی - مع لا)

یہ نتیجہ اس بات کو زیر نظر رکھ کر بھی فوراً حاصل ہو سکتا ہے کہ ح ٹ جسم پر کے حاصل انتظامی دباؤ کے مساوی ہے اور مانع کے چڑھاؤ مع لاک کی وجہ سے جسم کا اٹار مع ی - مع لا ہے۔

۱۰۴۔ ایک اسطوانی برتن کے اندر کچھ مانع ہے، ایک جسم اس مانع کے اندر تیر رہا ہے، جسم کی توانائی بالقوہ۔

جسم کو داخل کرنے کے پیشتر برتن کے اندر جو مانع ہے اس کی ہمواری یا ساکن سطح کو شمار کی صفر سطح مانو۔ فرض کرو کہ برتن کی عمودی تراش با ہے اور جسم کی آب تراش جبکہ جسم پر ہوا میں ہے۔ فرض کرو کہ توازن کے محل میں غرق شدہ حجم ح ہے۔ ج ٹ = ۱ لینے سے، ح جسم کے وزن کو بھی تعبیر کرتا

ہے۔ فرض کرو کہ کسی دوسرے محل میں غرق شدہ حجم ح ہے۔ اس موخر الذکر محل میں مانی کی ہموار سطح بقدر فاصلہ ح کے اوپر اٹھ جائیگی۔ پس اگر صفر سطح کے نیچے اچھال کے مرکز کی گہرائی گ ہو تو وزن ح بقدر گ = ح

بلندی کے اوپر اٹھا دیا گیا ہے اور کام جو ہوا وہ ح گ + ح کے مساوی ہے۔ اس لئے اگر صفر سطح کے اوپر جسم کے مرکز ثقل کا ارتعاش ق سے تعبیر ہو تو کل توانائی بالقوہ ہوگی

$$ح ق + ح گ + \frac{ح}{۲}$$

• د × ہم = ج {ث (ا + ک) فری (ا مر) فری}

جہاں تکمیل زیر ترین مہوار سطح سے سطحی تراش تک لیا گیا ہے۔

- ۱۰۔ چونکہ دفعہ (۹۳) کا نتیجہ (۱) درست ہے خواہ جسم مانع کے نیچے نکلا ہوا ہو یا نہ نکلا ہوا اس لئے گزشتہ دو دفعات کے نتائج بھی ہر ایک صورت میں درست ہیں اور چونکہ دفعہ (۹۴) کا جلد (۱) دفعہ (۹۸) کے جلد (۱) کی صورت ایک خاص صورت ہے اس لئے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ متجانس مانع کے لئے بھی حاصل شدہ نتائج درست ہیں خواہ جسم مانع کے نیچے نکلا ہوا ہو یا نہ ہو۔
- ۱۱۔ کلاً غرق شدہ جسم — ایک جسم غیر متجانس مانع میں کلاً غرق شدہ

تیر رہا ہے۔ اس کو کسی افقی محور کے گرد ایک صغیر زاوے میں گھمانے میں جو کام کیا جاتا ہے اسے معلوم کرو۔ اوپر کی طرح و ما کو گردش کا محور لو اور فرض کرو کہ محاور و لاوی جسم میں ثابت ہیں۔ نیز فرض کرو کہ و ما کی گہرائی گ ہے اور

ث = ف (گہرائی)

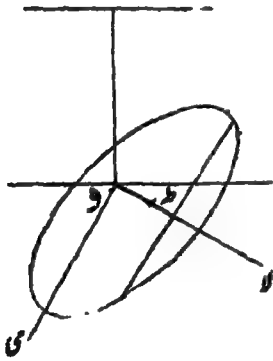
اس طرح توازن کے محال ہیں

$$د = ج \{ ف (ی + گ) - ف (و) \}$$

اور ہٹائے ہوئے محل میں

$$د = ج \{ ف (ی - \frac{1}{2} ی ط + گ + لا ط) - ف (و) \}$$

$$= د + ج (لا ط - \frac{1}{2} ی ط) ث + \frac{1}{2} ج لا ط فری$$



مستقل کمیت کے لئے شرط یہ ہے

$$\begin{aligned} & \text{[[[ا]] (ی + لا ط) فرلا فرما فری + [[ا]] ث : لا ط فرلا فرما = [[ا]] ک (ری) فرلا فرما فری} \\ \text{یا} & \text{[[[ا]] (ث + لا ط فری) (فری) فرلا فرما فری + ث : لا ط فرلا فرما = [[ا]] ک فرلا فرما فری} \\ \text{یا} & \text{[[[ا]] لا فری فری فرلا فرما فری + ث : لا ط فرلا فرما = .} \end{aligned}$$

اور دوسری شرط کے لئے ضروری ہے کہ

$$\text{[[[ا]] ک (ی + لا ط) ما فرلا فرما فری + ث : لا ط فرلا فرما = .}$$

لیکن

$$\text{[[[ا]] ک (ری) ما فرلا فرما فری = .}$$

∴ یہ شرط ہو جاتی ہے

$$\text{[[[ا]] لا فری فری فرلا فرما فری + ث : لا ط فرلا فرما = .}$$

دونوں شرطیں پوری ہونگی اگر محوری کے گرد متماثل ہو۔ یا اگر مستوی ماوی میں کے تمام افقی خطوط، متناظر افقی ترشوں کے ہندسی مرکزوں میں سے گزرنیوالے صدری محور ہوں اس طرح کہ تمام گہرائیوں پر

$$\text{[[[ا]] لا فرلا فرما = . اور [[ا]] لا فرلا فرما = .}$$

جب یہ شرطیں پوری ہوں اور مرکز ہو تو استرواوی جنت

$$\text{و : ث م : ط یا و (ھ م - ھ ث) ط}$$

$$\text{ط = \{ ج ث : ا : ا : ک ث فری (ا : ا : فری - و : ھ ث) \}}$$

$$= \{ \text{طا} - ۱ \} \frac{1}{\text{طا}} + \text{ضاط} - \text{طا} \}$$

جہاں پہلے کی طرح جسم کی کیت کے مرکز دث کے محدود (ضاط؛ کلا) ہیں

اور دضاط = دلا = ج کلا لث فرلا فرما فری

بہاؤ کے پیدا کرنے میں کل بیرونی کام جو ہوا وہ

$$= \frac{1}{\text{طا}} \{ \text{ج ث} \} \frac{1}{\text{لا}} \{ \text{لا فرما ج کلا لث فرما فری} \} \frac{1}{\text{لا فرما فری}} - \{ \text{تی} - \text{طا} \} \dots (۱)$$

اگر گہرائی پر تراش کا رقبہ لا ہو اور مستوی ماوی کے ساتھ تراش کا جو خط تقاطع ہے اس کے گرد گردش کا نصف قطر سا ہو تو دوسرے مکملہ پر تکمیل بالخصوص سے عمل کرنے سے ملے گا

$$\frac{1}{\text{طا}} \{ \text{ج ث} \} \frac{1}{\text{لا}} \{ \text{لا فرما ج کلا لث فرما فری} \} \frac{1}{\text{لا فرما فری}} - \{ \text{تی} - \text{طا} \} \dots (۱)$$

$$- \text{د} \times \text{ھ دث}$$

جہاں بلحاظی کے مکمل خط آب سے زیر ترین ہوا سطح تک لیا گیا ہے۔
یا مکمل کی ترتیب کو لٹ دینے سے کام کا جملہ ہو جاتا ہے

$$\frac{1}{\text{طا}} \{ \text{ج ث} \} \frac{1}{\text{لا}} \{ \text{لا فرما ج کلا لث فرما فری} \} \frac{1}{\text{لا فرما فری}} - \text{د} \times \text{ھ دث}$$

جہاں ث لا لاس جسم کی زیر ترین افقی تراش سے متعلق ہیں اور لا =

سوائے اُس صورت کے جبکہ جسم کا پینڈا مستوی ہو۔

توازن صریحاً قائم ہو گا اگر یہ جملہ مثبت ہو۔

۹۹۔ پس مرکز کے وجود کے لئے ہٹائے ہوئے مانع کی کیت مستقل ہونی چاہیئے اور اچھال کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی کوھ دث کو قطع کرنا چاہیئے۔

[[[دفرلا فرما فری + [[[دفرلا فرما فری
- لاطہ

جہاں عنصر فرلا فرما فری پر کانیا باؤ دے اور پہلے مکمل کی وسعت دہی ہے جو پہلے تھی لیکن دوسرا مکمل فائوں (و) ، ب و ب کے اندر لیا گیا ہے۔

(۹۵)

اب دے ج { ف (ی) - پ ی ط + لاطہ } - ف (۰) {

= دے ج (لاطہ - پ ی ط) (ی) ف (ی) + پ ج لاطہ ف (ی)

[[[دفرلا فرما فری = [[[دے ج ط لاطہ - پ ج ط (ی) ف (ی) - لاطہ ف (ی) { فرلا فرما فری

فائوں سے متعلق مکمل میں ہی ہر جگہ لاطہ اور د کے جملہ بالا میں ط کی صرف پہلی قوت برقرار رکھنے سے

دے ج { ف (ی) - ف (۰) + لاطہ ف (ی) {

= ج { ی ف (۰) + لاطہ ف (ی) {

[[[دفری ج = { پ لاطہ ف (۰) + لاطہ ف (۰) - لاطہ ف (۰) + لاطہ ف (۰) } - لاطہ

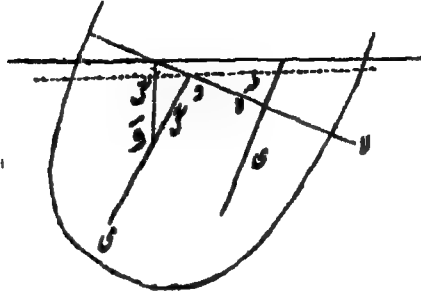
= پ ج لاطہ ف (۰) = پ ج لاطہ

اس لئے ہٹا دیا کرنے میں مانع کے دباؤں کے خلاف جو کام ہوا وہ توانائی بالقوہ میں اضافہ ہے اور

ج ط لاطہ فرلا فرما فری - پ ج ط لاطہ فرلا فرما فری (لا فرتی) فرلا فرما فری

+ پ ج لاطہ فرلا فرما

لیکن جسم کے وزن نے جو کام کیا وہ

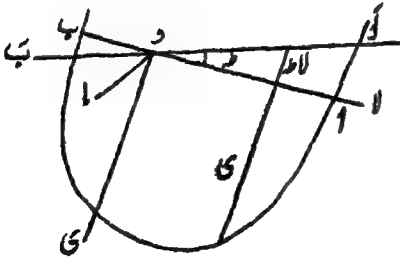


قائمیت کے لئے مشروط ہے۔

اے (ح-ح) (ح-گ) - ج (ط-گ)

۹۸۔ غیر متجانس مانع۔ ایک جسم غیر متجانس مانع میں تیر رہا ہے، تیراؤ کے
مستوی میں کے کسی خط کے گرد اس کو گھمانے میں جو کام کیا جاتا ہے اسے معلوم کرو۔
دفعہ (۹۳) کی طرح محاورہ اور وہی ترقیم استعمال کرو۔ ہم لے سکتے ہیں
ث = ف (ح) لیکن فرد = ج ث فری

∴ د = ج { ف (ح) - ف (و) }



دفعہ (۹۳) کے بموجب

جسم کو کسی محل میں مانع کے

اندروں داخل کرنے میں جو کام

کرنا پڑتا ہے وہ

دفعہ (۹۳) کے بموجب

جہاں تک غرق شدہ جسم

پر لیا گیا ہے۔ جسم کو جب

ایک صغیر زاویہ ط میں گھمایا

جائے تو یہ کام ہو جائیگا

اس لئے توانائی بالقوہ میں کل زیادتی

$$= \frac{1}{2} \text{ ج ث ط } (\text{ا س ر} - \text{ح قی}) + \frac{1}{2} \text{ ط و طا}$$

اور توازن قائم ہو گا بشرطیکہ

$$\text{ا س ر} < \text{ح قی} - \text{و طا} / \text{ج ث}$$

۹۷۔ اگر گردش کا محور و، گ گہرائی پر ہو اور تیراؤ کے مستوی پر اس کے ظل کو ہم محور و مانیں اور اوپر کی طرح فرض کریں کہ محاذ جسم کے ساتھ حرکت کرتے ہیں تو وقت پر $\frac{1}{2}$ گ ط کے نیچے اترتا ہے اور ہٹائے ہوئے

مائع کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں اضافہ

$$= \frac{1}{2} \text{ ج ث } (\text{ای} + \text{لا ط} + \frac{1}{2} \text{ گ ط}) (\text{ا} - \frac{1}{2} \text{ ط}) \text{ فلا فرما}$$

$$- (\frac{1}{2} \text{ ج ث } \text{ای} \text{ فلا فرما}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ج ث } (\text{لا ط} - \frac{1}{2} \text{ ی ط} + \frac{1}{2} \text{ ی گ ط} + \frac{1}{2} \text{ لای ط}) \text{ فلا فرما}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ ج ث ط } (\text{ا س ر} - \text{ح قی} + \text{ح گ}) + \text{ج ث ط ح لا}$$

اور جسم پر جاذبہ ارض نے جو کام کیا وہ

$$= \{ \text{و طا} (\text{ا} - \frac{1}{2} \text{ ط}) + \text{ضا ط} + \frac{1}{2} \text{ گ ط} - \text{طا} \}$$

اس لئے کل بیرونی کام جو ہوا وہ

$$= \frac{1}{2} \text{ ج ث ط } \{ \text{ا س ر} - \text{ح قی} - \text{گ} \} + \frac{1}{2} \text{ و ط } (\text{طا} - \text{گ})$$

جہاں سطحی تراش کا رقبہ (ہے اور تیراؤ کے مستوی پر ثابت محور کا جو ظل ہے اُس کے گرد اس کی گردش کا نصف قطر مہا ہے ۔

(۹۳)

یعنی محور واسطی تراش کا صدری محور ہونا چاہیئے۔
اس صورت میں یہ ظاہر ہے کہ اگر ہر، فٹ کے اوپر واقع ہو تو جسم کے
وزن اور حاصل سیالی دباؤ سے بنا ہوا جنت جسم کو واپس توازن کے محل پر لچا نیکا
میلان رکھے گا اور



$$\begin{aligned} &= ج \text{ ث } ح \times ف \times م \times ط \\ &= ج \text{ ث } ح (ه \text{ م} - ه \text{ ث}) ط \\ &ه \text{ م} = \frac{ط}{ح} \text{ اور توازن قائم} \\ &\text{یا غیر قائم ہو گا بموجب اس کے کہ م،} \\ &\text{ث کے اوپر ہو یا نیچے۔} \end{aligned}$$

جو نڈ پس مرکز اچھال کی سطح کے متصل عمادوں کا نقطہ تقاطع ہے اسلئے
عام طور پر ہر کی سطح کے صدری اختلا کے دو مستویوں میں اگر ہٹا د لئے جائیں
تو ان کے جواب میں دو پس مرکز ہونگے۔ اور اچھال کی سطح کا ایک صدری
لصف قطر اختلا ہر ہے۔

۹۶۔ مقید اجسام۔ ایک تیرنے والا جسم ایک ثابت افقی محور کے گرد گھومنے
پر مجبور ہے۔ اس صورت پر دفعہ (۹۴) کی طرح غور کیا جاسکتا ہے۔

اگر و ثابت محور ہو اور (ضنا، عا، طا)، (لا، ما، تا)، (علی، تریب
ث اور ه کے محدود ہوں اور و جسم کا وزن ہو تو توازن کی شدہ ہوگی

$$ج \text{ ث } ح \text{ لا} = و \text{ ضنا}$$

اگر گردش کا محور تیراؤ کے مستوی میں ہو اور جسم کو ایک صغیر زاویہ
ط میں گھمایا جائے تو ہٹائے ہوئے مانع کی وجہ سے توانائی بالقوہ میں اضافہ

$$= \frac{1}{2} ج \text{ ث } ط^2 (م^2 - ح^2) + ج \text{ ث } ط \text{ ح لا}$$

$$\begin{aligned} &\text{اور جسم کے ہٹاؤ کی وجہ سے نقصان} \\ &= - \frac{1}{2} ط^2 و \text{ طا} + ط و \text{ ضنا} \end{aligned}$$

جہاں جسم کی سطحی تراش کا رقبہ Δ اور واما کے گرد اس کی گردش کا نصف قطر r ہے۔

اس سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ توازن قائم ہوگا اگر

$\Delta r = \Delta h$ (مرا - ح * ہر * ہر)

فرقہ = ج * ہر (مرا - ح * ہر)

۹۵۔ اگر ہٹائے ہوئے مانع کا حجم مستقل ہو اور اگر ہٹائے ہوئے محل میں اچال کے مرکز میں سے گزرنے والا انتصابی خط کھٹ کو نقطہ مرا میں قطع کرتے تو مرا کو مرکز ابعدی پس مرکز کہتے ہیں۔

پس مرکز کے وجود کے لئے تحلیل شرطیں یہ ہیں

$\Delta r = \Delta h$ (مرا - ح * ہر)

یعنی گردش کا محور واما سطحی تراش کے مرکز ہندسی میں سے گزرنا چاہیئے۔
(دفعہ ۵۲ کے ساتھ مقابلہ کریں)۔ اور چونکہ اچال کا نیا مرکز، مستوی لاوی میں ہونا چاہیئے اس لئے

$\Delta r = \Delta h$ (مرا - ح * ہر)

لیکن $\Delta r = \Delta h$ (مرا - ح * ہر)

۱۔ بعض علماء لفظ پس مرکز کو ذرا وسیع معنوں میں استعمال کرتے ہیں چنانچہ پس مرکز کی تعریف وہ اس طرح کرتے ہیں کہ یہ وہ نقطہ ہے جہاں اچال کی سطح کے دو متصل عمادوں کا درمیانی اقل فاصلہ ان عمادوں میں سے ایک کو قطع کرتا ہے۔

حالت کے تمام پر واقع ہو تو اس کی مسادات ہو جاتی ہے

$$۲ ی = ک \frac{لا}{ا} + ک \frac{ب}{ب}$$

اور پس مرکز میں بلندیوں کی اور سطح پر ہیں۔

۹۱ — ٹھوس جسم جو کٹا غرق شدہ تیر رہا ہے۔

اس صورت میں ہمیں اسی طرح کی مساداتیں حاصل ہونگی

ک = $\frac{ل}{ن}$ ث فرح اور $\frac{ل}{ن}$ = $\frac{ل}{ن}$ ث فرٹ یا (ث ن) = $\frac{ل}{ن}$ ث فرٹ
متجانس سیال میں غرق شدہ جسم کی صورت میں اچھال کے مرکز میں کوئی مٹاؤ نہیں ہوتا۔
۹۲ — امثلہ — (۱) مخروط جس کا نصف زاویہ α اور اس نیچے وار ہے۔

اگر اس سے کسی تراض کا فاصلہ لا ہو تو

$$ا = \frac{ل}{ن} \frac{لا}{ا} \sin \alpha$$

$$\therefore \text{فرٹ} = \frac{لا}{ا} \sin \alpha$$

نیز فرح = $\frac{لا}{ا} \sin \alpha$ فرٹ اس طرح فرٹ = $\frac{لا}{ا} \sin \alpha$ فرح

$$ا = \frac{ل}{ن} = \frac{\text{فرٹ فرٹ}}{\text{فرٹ فرح}} = \frac{لا}{ا} \sin \alpha \frac{\text{فرٹ فرٹ}}{\text{فرٹ فرح}}$$

$$= \frac{لا}{ا} \sin \alpha$$

جہاں لا، و کے اوپر اچھال کے مرکز کا ارتفاع ہے اور اس طرح

و کے اوپر پس مرکز کا ارتفاع لا قسط ہے۔

(۲) مکافہ نما جس کا وتر خاص ل اور اس نیچے وار ہے۔

(۹۰)

$$\text{یہاں } ا = \frac{ل}{ن} \frac{لا}{ا} \sin \alpha \quad \therefore \text{فرٹ} = \frac{لا}{ا} \sin \alpha$$

نیز فرح = $\frac{لا}{ا} \sin \alpha$ فرٹ اس طرح فرٹ = $\frac{لا}{ا} \sin \alpha$ فرح

ہوتی ہیں، یہاں ان دو محلوں میں اچھال کے مرکز بالترتیب (لا، با، ہی) (لا، ما، ہی) ہیں اور ل، ر، ف، ب، م متناظر آب خط تراش پر علی الترتیب دو ہر کے مکملوں

کر لا فر لا فر ما ، کر لا فر لا فر ما ، کر لا فر لا فر ما

کو تعبیر کرتے ہیں۔

سلسل سیال کی صورت لینے سے

(۸۹)

ک (لا - لا) = ل + ف م

ک (را - با) = ف ل + ب م

اور ک (ہی - ہی) = ہ (ل + ل) + ف ل م + ب م

یہاں ک = ث ح + ث ح فرٹ

= ث ح + [ث ح] - ث فرٹ

= ث فرٹ

اور ل = ث ل + ث ل فرٹ

= ث ل + [ث ل] - ث فرٹ

= ث ل فرٹ

اور اسی طرح کا جلوب کے لئے ہوگا۔ لاحتہ ا، ن غرق شدہ جسم کی اوپر کی اور نیچلی تراشوں سے متعلق ہیں، اس صورت میں ح، ن صریحاً صفر ہے اور اور ان بھی صفر ہے سوائے اُس صورت کے جبکہ جسم کا پینڈا چپٹا یا مستوی ہو۔ اچھال کی سطح تین ساداتوں سے دفعہ ۸ کی طرح حاصل ہوتی ہے اور خاص صورت میں جبکہ ف = ۰، اور مبداء اچھال کے مرکز کی متوازن

قوتوں کا کل معیار ث کے گرد ہوگا

ج ث (ا س ر ا - ح * ہ ث) ط + ج ث (ا س ر ا - ح * ہ ث) ط

یا ج ث ج ث ح * ہ ث م * ط + ج ث ح * ہ ث م * ط

جس میں ث م اور ث م کی مثبت سمت اوپر وار ہے۔

تو ان صریحاً قائم ہوگا اگر م اور م دونوں ث کے اوپر واقع ہوں لیکن اگر م، ث کے نیچے ہو تو قائمیت کے لئے

ث ح * ہ ث م < ث ح * م ث

یا ث (ا س ر ا - ح * ہ ث) < ث (ا س ر ا - ح * ہ ث)

۹۰۔ غیر متجانس مانع — ایک ٹھوس جسم متغیر کثافت کے مانع میں تیر رہا ہے۔ اچھال کی سطح معلوم کرنا مطلوب ہے۔

پہلے ایک جسم کی صورت میں غور کرو جو ایسے مانع میں تیر رہا ہے جو نزدیکی ترتیب میں مختلف کثافتوں ث، ث، ث، ث، ث کی تہوں پر مشتمل ہے۔ فرض کر دو کہ ث کثافت کی تہ کی اوپر کی سطح کے نیچے جسم کا کل حجم غرق شدہ ح سے تعبیر ہوتا ہے۔

دفعہ ۸ کی طرح فرض کر دو کہ اس ستومی کی ابتدائی آب خطراتی ح ہے ہے اور فرض کر دو کہ خفیف طور پر ہٹاے ہوئے محل میں اس ستومی کی مسادات ی = ج + ل + م مابقیہ یہ مسادات حاصل ہوتی ہے

{ ث + ح + (ث - ث) ح + (ث - ث) ح + ... + (ث - ث) ح } (لا - لا)

= { ث + ل + (ث - ث) ل + ... + (ث - ث) ل } ل

+ { ث + ف + (ث - ث) ف + ... + (ث - ث) ف } م

اسی طرح (ا - با) اور (ی - ح) کے لئے متناظر مساداتیں حاصل

$$= ج ش ح \times (ه ن - گ) ط$$

پس یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ توازن قائم ہوگا اگر

$$ج ش (م - ج ش ح (ه ن - گ) + و (ش ل - گ)$$

مثبت ہو اس شرط کے ساتھ کہ

$$و ج ل = ج ش ح \times ج ن$$

نتیجہ صریح - اگر جسم متجانس مائع میں آزادانہ تیر رہا ہو اور تشاؤل کا ایک مستوی رکھتا ہو اور اگر اس مستوی میں کسی افقی محور کے گرد جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں گھما دیا جائے تو اسگرداوی جنت ہوگا

$$ج ش ط (م - ج ش ح \times ه ش)$$

جہاں تشاؤل کے مستوی اور مائع کی سطح کے خط تقاطع کے گرد سطحی تراش کے جوہر کا معیار لیا ہے۔

۸۹ — ایسے جسم کا توازن جو دو مائعات میں جزو غرق شدہ تیر رہا ہے۔ فرض کرو کہ اوپر کے مائع کی کثافت ش اور نیچے کے مائع کی کثافت + ش ہے۔

نیز فرض کرو کہ کل حجم غرق شدہ ج ہے اور ح، ح کا وہ حصہ ہے جو نیچے کے مائع میں غرق ہے۔ تیراؤ کے مستویوں کے رقبہ (، ڈ) ہیں۔ تب جسم کے وزن کو تھانسنے والی قوتیں، مائع کی کمیتوں کے اوزان ش ح اور ش ح ہیں جو اہر پر وار عمل کرتی ہیں۔

ایسی صورت لو جس میں جسم ایک ایسے انتصابی مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے جو ہٹاؤ کی مستوی پر عمود وار ہے، اس طرح جسم اور کمیتوں ش ح اور ش ح کے مراکز ہندسی ش، ه، ه، ه ایک ہی انتصابی خط میں ہونگے۔ اگر جسم کو ایک صغیر زاویہ ط میں تشاؤل کے مستوی میں کسی افقی محور کے گرد ہٹا دیا جائے تو توازن کے محل پر لیجانے کا میلان رکھنے والی

یا (ثان جم ط + مر ن جب ط) < یا > (ثان جم ط + مر ن جب ط)
 اور چونکہ $\text{و} \times \text{ثان} = \text{و} \times \text{ثان}$
 اس لئے توازن قائم ہوگا یا غیر قائم بموجب اس کے کہ
 $\frac{\text{و}}{\text{و}} < \text{یا} > \frac{\text{مر ن}}{\text{مر ن}}$

۸۶ — قیود کے ماتحت تیرنے والے جموں کے توازن کی قائمیت -

قید کی ایسی صورتوں میں جس میں چھوٹے ہٹاؤ کے لئے ہٹائے ہوئے مانع کا حجم نہیں بدلتا پس مرکز کا نظریہ سیالی دباؤ کے خط عمل کا تعین کرتا ہے اور قائمیت کا سوال پھر آسانی سے حل ہو جاتا ہے -

مثال کے طور پر فرض کرو کہ ایک جسم جزو غرق شدہ، ایک افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہے اور یہ افقی محور اس مستوی تراش کے مرکز ہندسی (ج) کے انتصاباً نیچے واقع ہے جو مانع کی سطح جسم میں کاٹی ہوئی ہے -

اگر جسم کو چھوٹے زاویہ ط میں ہٹا دیا جائے تو اس ہٹاؤ کا یہ اثر ہوگا کہ مرکز ہندسی (ج) نیچے بیٹھ جائے گا اور یہ ہٹاؤ ط پر منحصر ہوگا - اور اس لئے صغیر مقداروں کے پہلے رتبتہ تک ہٹایا ہوا حجم غیر متغیر رہیگا اور پس مرکز وہی ہوگا گویا کہ ج مانع کی سطح میں ہی واقع ہے -

اگر جسم ایسے افقی محور کے گرد حرکت کر سکتا ہو جو نقطہ ج کے نیچے انتصاباً واقع نہ ہو تو ہٹائے ہوئے حجم میں جو تبدیلی واقع ہوگی وہ نظر انداز نہیں ہو سکے گی اور قائمیت کے سوال کو ہٹائے ہوئے مانع کے عمل پر بالاراستہ غور کرنے سے حل کرنا پڑیگا -

مثال — ایک مستطیل پتہ ایک مانع میں جسکی کثافت اکی کثافت کا دو چند ہے ساکن ہے اس طور پر کہ اس کے دو متعلقے انتصابی ہیں - یہ پتہ اپنے ایک انتصابی منقطع کے وسطی نقطہ کے گرد اپنے مستوی میں حرکت کر سکتا ہے -
 شکل پتہ کو تیر کرتی ہے جبکہ اسکو چھوٹے زاویہ اوب (ط) میں ہٹا دیا گیا ہے - نقطہ و جو مانع کی سطح میں ہے منقطع کا وسطی نقطہ ہے -

اسی طرح ڈھ = $\frac{۳}{۴}$ ف قط'ع - $\frac{۲}{۳}$ ف

نیز $\frac{۹}{۳} = \frac{۳}{۱}$
اس لئے توازن قائم ہوگا اگر

$$\left(\frac{۳}{۱}\right) < \frac{۹ \text{ ف قط'ع} - ۸ \text{ ف}}{۹ \text{ ی قط'ع} - ۸ \text{ ف}}$$

جہاں مساوات

$$۰ = \frac{۱}{۳} \text{ ج ڈھ} = \frac{۱}{۳} \text{ مس'ع} (۳ \text{ ف} - ۲ \text{ ف}) = \text{محفوظ کا وزن}$$

سے ی حاصل ہوگا۔

۸۵۔ اگر برتن کے اندرونی سیال اور ہٹائے ہوئے سیال کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی میں نہ ہوں تو فرض کرو کہ ان مرکوزوں میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی کی سمت میں ہٹاؤ واقع ہوتا ہے اور جسم اس مستوی کے لحاظ سے متشاکل ہے۔

فرض کرو کہ جسم کی کمیت کا مرکز ڈھ، ہٹائے ہوئے سیال کا مرکز ہٹن کے اندرونی سیال کا مرکز ہے اور ہٹن ہرپس مرکز ہیں۔

نیز فرض کرو کہ ڈھ ڈھ کے محل میں افقی ہے اور ڈھ ڈھ کے ہٹائے ہوئے محل میں ڈھ سے

گزرنے والا افقی خط ہے۔

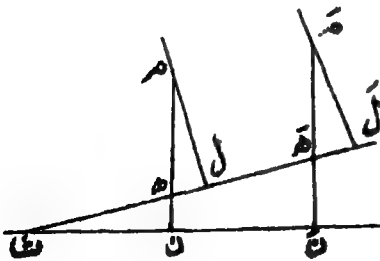
اگر وہی معنی ہوں

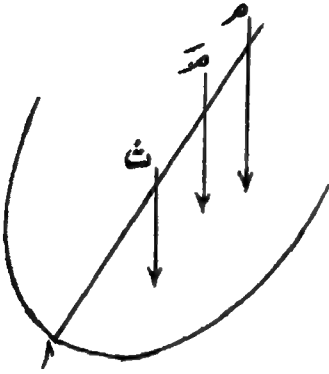
جو گزشتہ دفعہ میں کئے گئے اور ط

ہٹاؤ کا زاویہ ہو تو توازن قائم یا غیر

قائم ہوگا بوجب اس کے کہ

وہ ڈھ ڈھ > یا < وہ ڈھ ڈھ





فرض کرو کہ ہٹائے ہوئے سیال
کا پس مرکز م ہے اور برتن کے
اندرونی سیال کا مہ اور ہٹائے ہوئے
سیال کا وزن و ہے اور اندرونی سیال
کا و۔ برتن کی کیت کے مرکز ث کے
گرد معیار لینے سے، حاصل سیالی و باؤ برتن
کو متوازن کرنے کا میلان رکھیں گے
یا اس کے برعکس ہو جب اس کے کہ
و × ث م - و × ث م
مثبت یا منفی ہو یعنی ہو جب اس کے کہ

$$\frac{و}{ث} < ۱ \text{ یا } > \frac{ث}{م}$$

مثال۔ ایک کھوکھلا مخروط جس میں پانی ہے پانی میں تیر رہا ہے اس طور پر
کہ اس کا محور انتقابی ہے۔

فرض کرو کہ ف = مخروط کے محور کا طول
ف = مخروط کے اندرونی سیال میں ڈوبے ہوئے محور کا طول
ی = بیرونی سیال کی سطح کے نیچے ڈوبے ہوئے محور کا طول
مخروط کے زاویہ راس کو ۲۰ لینے سے ہمیں حاصل ہوگا

$$م = \frac{۳}{۴} ی س ۲۰$$

$$لیکن \quad م = \frac{۳}{۴} ف - \frac{۳}{۴} ی$$

$$\therefore \quad ث م = \frac{۳}{۴} ی ق ۲۰ - \frac{۳}{۴} ف$$

۱۔ یہ صورت ایسے جہاز سے متعلق ہے جس میں سوراخ ہو گیا ہو اور راکٹا ہو۔ اگلی دفعہ ایسے
سوراخدار جہاز سے متعلق ہے جو سر کے بل اہتر (pitch) کرتا ہے۔

اگر

جم ع حجم ط < ۱. جم (ط + ع) جم (ط - ع)

یہ ایک ایسی بشرط ہے جو ہمیشہ صادق آتی ہے کیونکہ ع اور ط میں سے ہر ایک زاویہ قائمہ سے کم ہے۔
اس لئے مخروط کے تعدیلی توازن کی صورت میں کسی محدود ہٹاؤ کے لئے توازن کو قائم کیا جاسکتا ہے۔

۸۔ جب مائع ایک برتن میں ہو جسکو اپنے اصلی محل سے فدا سا ہٹا دیا گیا ہے تو گذشتہ تحقیقات کی مدد سے ہم حاصل کیجے اور دباؤ کے خط عمل کا تعین کر سکتے ہیں درحقیقت اس صورت میں پچھلی صورت کی طرح یہ مسئلہ حسب ذیل ہے۔
ایک ٹھوس جسم اب ج سے ایک دیا ہوا حجم ایک مستوی کے ذریعہ تراش لیا گیا ہے اس حجم کا مرکز ہندسی ہے اور خط ج ھ اس مستوی پر عمود وار ہے۔ اگر وہی حجم ایک ایسے مستوی سے تراشا جائے جو مستوی اب سے بہت چھوٹا زاویہ بناتا ہے تو اس خط مستقیم کا محل معلوم کرنا مطلوب ہے جو دوسرے مستوی پر عمود وار ہے اور اس سے جو حجم کٹتا ہے اس کے مرکز ہندسی میں سے گزرتا ہے۔

اگر برتن کی اندرونی سطح ایسے مستوی کے لحاظ سے متشکل ہو جو ھ میں سے گزرتا ہے اور تراش کے دونوں مستویوں کے خط تقاطع پر عمود وار ہے تو وہ خط جسکا محل دریافت کرنا مطلوب ہے ج ھ کو مرکز مابعد ہر پر قطع کرے گا جس کا مقام ہمارے گزشتہ نتائج سے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

(۸۴)

۸۴۔ برتن جس میں مائع ہو۔ ایک کھوکھلا برتن جس میں مائع ہے مائع میں تیر رہا ہے توازن کی نوعیت معلوم کرنا مطلوب ہے یہ فرض کر کے کہ جسم کی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے ہٹاؤ کے انتصابی مستوی کے لحاظ سے جسم متشکل ہے اور یہ کہ جسم اور مائع کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصابی خط میں ہیں۔

اس لئے ہٹائے ہوئے سیال کا حجم

$$= \frac{1}{2} \text{ حجم (ط - ع) (ناقص کا رقبہ)}$$

$$= \frac{1}{2} \pi \text{ د}^2 \text{ جب}^2 \text{ حجم}^2 \left\{ \frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right\}^{\frac{2}{3}}$$
 اب اگر سیال اور مخروط کی کثافتیں θ ہوں تو چونکہ ہٹائے ہوئے
 سیال کا وزن مخروط کے وزن کے مساوی ہے اس لئے

$$\theta \text{ د}^2 \text{ جب}^2 \text{ حجم}^2 \left\{ \frac{\text{حجم (ط - ع)}}{\text{حجم (ط + ع)}} \right\}^{\frac{2}{3}} = \theta \text{ س}^3 \text{ ع} \text{ [ن مخروط کا ارتفاع ہے]}$$
 یا

$$\left(\frac{\text{د}}{\text{س}} \right)^2 = \frac{\theta}{\theta} \left\{ \frac{\text{حجم (ط + ع)}}{\text{حجم (ط - ع)}} \right\}^{\frac{2}{3}} \frac{1}{\text{حجم}^2 \text{ ع}}$$
 اور $\text{ول} < \text{وٹا اگر}$ $\text{حجم}^2 \text{ ع} < \frac{\text{حجم}^2 \text{ ط}}{\text{حجم (ط + ع)}}$
 یا اگر $\frac{\text{س}^3}{\text{د}^2} < \frac{\text{حجم}^2 \text{ ع} \text{ حجم}^2 \text{ (ط + ع)}}{\text{حجم}^2 \text{ (ط - ع)}}$
 ط کو لا انتہا چھوٹا فرض کرنے سے صغیر ہٹاؤ کے لئے ہمیں قاعدیت کی
 شرط ملے گی

$$\frac{\text{س}^3}{\text{د}^2} < \text{حجم}^2 \text{ ع}$$
 جو دفعہ (۸۱) کی مثال ۳ کے مطابق ہے۔
 فرض کرو کہ مخروط کا توازن تبدیلی ہے یعنی فرض کرو کہ

$$\theta = \theta \text{ حجم}^2 \text{ ع}$$
 تو محمد و ہٹاؤ کے بعد سیال کا عمل مخروط کو اپنے اصلی محل کی طرف لیجانے پر اہل ہوگا

ایک ٹھوس مخروط اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار ہے اس کو ایک انتصابی مستوی میں زاویہ میں گھمایا گیا ہے۔ ہٹائے ہوئے سیال کا حجم وہی رہتا ہے۔ سیالی دیاؤ کے معیار کی سمت معلوم کرنا مطلوب ہے۔ فرض کرو کہ سیال کی مستوی سطح سے حاصل شدہ مخروطی تراش کا محور اعظم AB ہے اور اس کا وسطی نقطہ J ہے، خطوط AA' ، BB' ، JJ' خط AB پر علی القوائم ہیں اور زاویہ $\angle BOB' = 2\alpha$ اور $\angle AOA' = 2\alpha$

$a-b=119$

اور وہ باب = ۲ - ط - ع

$$\text{وج} = \frac{1}{4}(\text{وا} + \text{وب}) = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\text{جب}(\text{ط} - \text{ع})}{\text{جب}(\text{ط} + \text{ع})} + \frac{\text{جب}(\text{ط} - \text{ع})}{\text{جب}(\text{ط} + \text{ع})} \right\} = \frac{\text{د. جب ط}}{\text{جم}(\text{ط} + \text{ع})}$$

$$\therefore \text{ول} = \frac{2}{4} \text{ و } \frac{\text{جم ط}}{\text{جم}(\text{ط} + \text{ع})}$$

اس لئے $ھم = \frac{۲}{۳} م$ جب $\frac{۲}{۳} م$ اور $ھٹ = \frac{۲}{۳} (م - ۱)$ جم $\frac{۲}{۳}$

اور $ھم < ھٹ$ اگر جم $\frac{۲}{۳} > \frac{۱}{۲}$

اب دفعہ (۴۹) میں جس کا حوالہ پہلے دیا جا چکا ہے ہم نے ثابت کیا ہے کہ توازن کے یا تو تین محل ہونگے یا صرف ایک بموجب اس کے کہ

$$جم > \frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳}$$

اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جب توازن کے تین محل ہوں تو درمیانی محل جس میں ج ب افقی ہے غیر قائم توازن کا محل ہوگا۔ اور دوسرے دو نوں محلوں میں توازن قائم ہوگا۔

اگر توازن کا صرف ایک محل ہو تو توازن قائم ہوگا۔

طالب علم کے لئے یہ اچھی مشق ہوگی اگر وہ ان نتائج کو اچھال کے سننے کی مسادعات معلوم کر کے اس کے مرکز احمکا کا مقام دریافت کرنے سے حاصل کرے۔

۸۲۔ محدود ہٹاؤ۔ اگر ایک ٹھوس جسم پانی میں تیر رہا ہو اور اس کو توازن کے محل سے ہٹا کر ایک دئے ہوئے زاوے میں گھمایا جائے تو پہلے کی طرح سیالی دباؤ کا معیار استرداد ہی ہوگا یا غیر استرداد ہی بموجب اس کے کہ نقطہ L جس پر اچھال کے نئے مرکز میں سے گزرنے والا انتصابی خط، خط ھٹ کو قطع کرتا ہے ھٹ کے اوپر یا نیچے واقع ہو۔

اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ اگر L ھٹ کے اوپر واقع ہو تو جسم کو آزاد کر دینے سے وہ اپنے اصلی محل کی طرف لوٹ آئیگا اور اس میں سے استتزاز کر لیا جائے کہ قائمیت کی بہاری سابق تعریف کے بموجب اصلی محل قائم توازن کا محل ہوگا۔ علم محل کا ایک عام قانون یہ ہے کہ قائم اور غیر قائم توازن کے محل یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتے ہیں اور ممکن ہے کہ جسم اپنے اصلی محل سے اس ہٹاؤ میں توازن کے محلوں میں سے گزر چکا ہو۔

مثلاً ایک خاص مثال حسب ذیل ہے۔

$$\left(\frac{۲}{۳} و \frac{۲}{۳} و \frac{۲}{۳}\right) اور \left(\frac{۲}{۳} و \frac{۲}{۳} و \frac{۲}{۳}\right)$$

$$\therefore \text{ھٹ} = \frac{۲}{۳} \{ (۱-۱) + (۱-۱) + (۱-۱) \} = ۰ \quad (۸۱)$$

$$= \frac{۲}{۳} \{ ۱ + ۱ + ۱ - ۱ - ۱ - ۱ \} = ۰$$

جس سے اور مساوات بالاک اداو سے ہم حاصل کرتے ہیں

$$\text{ھٹ} = \frac{۲}{۳} \text{ جب } \frac{۲}{۳} \text{ (} \frac{۲}{۳} \text{ جم } \frac{۲}{۳} \text{ - } \frac{۲}{۳} \text{)}$$

رتبہ ناق = ۲ م جب ط اور اگر پس مرکز ہو اور ل منشور کا طول

$$\frac{۲}{۳} \text{ م جب ط} \times \text{ھم} = \frac{\text{ناق}}{۱۲} \times \text{ناق} \times \text{ل}$$

$$\therefore \text{ھم} = \frac{\text{ناق}}{۲۴ \text{ م جب ط}}$$

$$\text{لیکن } \text{ناق} = ۲ (۱ + ۱ - ۱ - ۱ - ۱ - ۱) \text{ جم ط}$$

$$= ۱۲ \text{ جم } \frac{۲}{۳} \text{ (} \frac{۲}{۳} \text{ جم } \frac{۲}{۳} \text{ - } \frac{۲}{۳} \text{)}$$

$$\therefore \text{ھم} = \frac{۲}{۳} \times \frac{۱۲ \text{ جم } \frac{۲}{۳}}{۲۴ \text{ م جب ط}} \text{ (} \frac{۲}{۳} \text{ جم } \frac{۲}{۳} \text{ - } \frac{۲}{۳} \text{)}$$

$$\text{اور } \text{ھم} < \text{ھٹ اگر } \frac{۲}{۳} \text{ م جب ط} > \frac{۲}{۳} \text{ جم ط (} \frac{۲}{۳} \text{ جم } \frac{۲}{۳} \text{ - } \frac{۲}{۳} \text{)}$$

$$\text{یعنی اگر } \frac{۲}{۳} \text{ جم ط} < \frac{۲}{۳}$$

دم اس صورت پر غور کرو کہ جس میں قاعدہ انقی ہے اور اس لئے ناق اب ج کے متوازی ہے۔

$$\text{رتبہ ناق} = ۲ م جب ط$$

$$\text{ناق} = \text{ناق} = ۲ م، \text{ ناق} = ۲ م - \text{جب } \frac{۲}{۳}$$

اور $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \text{ ی } \frac{1}{2} \text{ مس }^2$

۱۰ ھم = $\frac{3}{4} \text{ ی } \text{ مس }^2$

۱۱ ھٹ = $\frac{3}{4} \text{ ف } - \frac{3}{4} \text{ ی}$

اور اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$\text{ی مس }^2 < \text{یا} > \text{ف} - \text{ی}$

لیکن اگر ث اور ث سیال اور مخروط کی کثافتیں ہوں تو

$$\left(\frac{\text{ی}}{\text{ف}} \right)^2 = \frac{\text{ث}}{\text{ث}}$$

اس لئے توازن قائم یا غیر قائم ہوگا بموجب اس کے کہ

$$\frac{\text{ث}}{\text{ث}} < \text{یا} > (\text{جم }^2)$$

مثال ۴۔ ایک متساوی الوجہین مثلثی منشور تیرا ہے اس طور پر کہ اس کا قاعدہ غرق نہیں ہے اور اس کے کنارے افقی ہیں۔
اول توازن کے اس محل پر غور کرو جس میں منشور کا قاعدہ افق سے مائل ہو دیکھو رنہ (۴۹)۔

اس صورت میں اگر $\text{ا} = ۲$ اور $\text{ا} = ۲$ اور اگر صفحہ (۸۰) کی مساوات (ب) میں ہم $\text{ا} = \text{ب}$ رکھیں تو ا اور ا مساواتوں
$$۱ + ۱ = ۲ + ۲ \text{ جم }^2$$

$$۱ = ۱ \text{ م}^2$$

سے حاصل ہو جاتے ہیں۔

اب اور ا ج کو حوالے کے محاور قرار دینے سے ث اور ھ کے محدود
علی الترتیب ہونگے

اس لئے اگر محور کا طول Γ غرق ہو تو

$$\pi \Gamma^2 \times \text{ہم} = \frac{\pi \Gamma^2}{4} \times \text{ہم} \quad \text{یا} \quad \text{ہم} = \frac{\Gamma^2}{4}$$

اور توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{\Gamma^2}{4} < \frac{\Gamma^2}{4} - \frac{\Gamma^2}{4}$$

مثال ۲۔ ایک دائری اسطوانہ تیرا ہے اسطور پر کہ اس کا محور افقی اور سیال کی سطح میں ہے۔ اس کو اس کے محور میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی میں ہٹا دیا گیا ہے۔

تیراؤ کا مستوی ایک مستطیل ہے اور

$$\text{اے} = \frac{1}{4} \Gamma^2$$

جہاں Γ اسطوانہ کا طول اور $\frac{1}{4}$ نصف قطر ہے

$$\text{ہم} = \frac{\Gamma^2}{4}$$

اور توازن قائم ہوگا اگر

$$\frac{\Gamma^2}{4} < \frac{\Gamma^2}{4}$$

$$\Gamma < \Gamma$$

مثال ۳۔ ایک ٹموس مخروط انتصابی محور اور نیچے دار اس کے ساتھ

تیرا ہے۔

فرض کرو کہ Γ محور کا طول ہے،

ی محور کا وہ حصہ جو غرق ہے،

اور $\frac{1}{4}$ مخروط کا زاویہ اس ہے

$$\text{اے} = \frac{1}{4} \Gamma^2 \sin^2 \theta$$

$$۲ی = \frac{\text{فرح}}{\text{فرزرب}} - (\text{فرز}) \{ \text{لا}^۲ \text{فرز} - ۲ \text{لا}^۲ \text{ما}^۲ \text{فرز} + \text{ما}^۲ \text{فر} \}$$

خاص صورت میں جبکہ فرز = ۰ تو یہ مساوات ہو جاتی ہے

$$۲ی = \text{لا}^۲ \frac{\text{فرح}}{\text{فر}^۲} + \text{ما}^۲ \frac{\text{فرح}}{\text{فرز}^۲}$$

اور تیراؤ کی سطح کے نصف قطر انہیں $\frac{\text{فر}^۲}{\text{فرح}}$ اور $\frac{\text{فرز}^۲}{\text{فرح}}$ جیسا دفعہ ۵ میں۔

مسم دیکھتے ہیں کہ ٹھوس کی دو متوازی تراشوں کے صدری محوروں کا متوازی

ہونا ضروری نہیں ہے۔ اس طرح اگر $\text{فرز} = ۰$ تو اس سے یہ نتیجہ نہیں نکلتا کہ

$$\frac{\text{فرز}}{\text{فرح}} = ۰$$

اس طرح دفعہ ۵ کے نتائج صرف ان صورتوں میں ہی درست ہونگے

جن کو اس دفعہ میں مان لیا گیا ہے یعنی تشاکل کے انتصابی مستوی موجود ہیں

جن میں افقی تراشوں کے تمام صدری محور واقع ہوتے ہیں۔

۸۱۔ پس مرکز کا مقام معلوم کرنے کی چند مثالیں درج کی جاتی ہیں۔

مثال ۱۔ نصف قطر اور طول ف کا ایک ٹھوس اسطوانہ انتصابی محور کے ساتھ تیر رہا ہے۔

اس صورت میں تیراؤ کا مستوی ایک دائری رقبہ ہے اور

$$\text{دس} = ۴ \left(\frac{۱}{۲} \text{ما}^۲ \text{فر} \right) = \frac{۴}{۳} \left(\frac{۱}{۲} \text{لا}^۲ - \frac{۱}{۲} \text{فر} \right)$$

$$= \frac{۴}{۳} \left(\frac{۱}{۲} \text{لا}^۲ - \frac{۱}{۲} \text{فر} \right) = \frac{۴}{۳} \left(\frac{۱}{۲} \text{لا}^۲ - \frac{۱}{۲} \text{فر} \right)$$

$$= \frac{۲}{۳} \text{لا}^۲$$

لے ٹیکلٹ کے مسئلہ کی تصحیح اور گزشتہ چند دفعات کا طرز استدلال اور دفعات آئندہ ۹۰، ۹۱، ۹۲،

۱۰، ۱۱، ۱۲ ڈاکٹر برام ویج (Dr. Bromwich) کے من فکر کا نتیجہ ہیں۔

اب دفعہ ۵۵ کی رو سے توازن کے محل ایک ایسے وزنی جسم کے توازن کے محل دریافت کرنے کے معادل ہیں جو اچھال کی سطح سے محیط ہو اور ایک اتنی مستوی پر لگا ہوا ہو۔ پس قائمیت کے لئے اس مستوی سے مرکز ثقل کا ارتفاع اقل ہونا چاہیئے۔ اس کے لئے ضروری ہے کہ $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ سے جی چھوٹا ہو یا مرکز ثقل دونوں پس مرکوزوں کے نیچے واقع ہو۔

۸۰۔ تیراؤ کی سطح - لیکرٹ کا مسئلہ۔

فرض کر دو کہ ٹھوس دفعہ ۸ کے بوجب دوسرے محل میں ہے اور اسکو دبانے سے غرق شدہ حجم میں ایک چھوٹی مقدار مفع ح کا اضافہ ہوتا ہے۔ اگر حجم مفع ح کی چمکتی کے مرکز ثقل کے محدود ضاء عا، طا ہوں تو ضاء مفع ح = (ح + مفع ح) (لا - لا + مفع لا - مفع لا) = ل مفع ۱ + م مفع ۲ دفعہ ۸

اسی طرح عا مفع ح = ل مفع ۱ + م مفع ۲ (۶۹)

اور طا مفع ح = $\frac{1}{4}$ (ل مفع ۱ + ۲ ل م مفع ۲ + م مفع ۲)

نیز جیسے چمکتی کی موٹائی کم کر دی جاتی ہے نقطہ (ضاء، عا، طا) تیراؤ کی سطح کے متناظر نقطہ پر منطبق ہونے کی طرف مائل ہوتا ہے یعنی آب خط رجحان کے مرکز ہندسی پر۔

اس لئے تیراؤ کی سطح پر روابط حاصل ہوتے ہیں

$$لا \times فرح = ل فر ۱ + م فر ۲$$

$$ما \times فرح = ل فر ۱ + م فر ۲$$

$$جی \times فرح = \frac{1}{4} (ل فر ۱ + ۲ ل م فر ۲ + م فر ۲)$$

اور تیراؤ کی سطح کی مساوات ہوگی

اس ۲ (ی-ی) = ل (لا-لا) + م (ما-ما) یا

یا ۲ (ی-ی) = $\frac{ح}{ب-ب}$ {ب (لا-لا) - ۲ ف (لا-لا) (ما-ما)}

جو اچھال کی سطح کی تقریبی شکل ہے۔ اگر ابتدائی محور لا اور ما مستوی تراش کے صدری محور ہوں تو ف = . اور اگر سدا کو اچھال کے مرکز پر پہلے مقام منتقل کیا جائے تو سطح کی مساوات ہو جائیگی

$$۲ ی = \frac{ح}{ب} + \frac{ح}{ب}$$

اب اگر ہم پس مرکزوں کی تعریف اس طرح کریں کہ وہ اچھال کی سطح کی صدری عمادی تراشوں کے مراکز انحنائیں تو اچھال کے مرکز کے اوپر پس مرکزوں کے ارتفاع صدری نصف قطر انحناء $\frac{ح}{ب}$ یا $\frac{ب}{ح}$ ہونگے۔

۷۹۔ قائمیت کی مشرط۔

اچھال کی سطح کے نقطہ (لا، ما، ی) پر ماسی مستوی ہے

$$طا-ی = \frac{ح}{ب} (ضما-لا) + \frac{ح}{ب} (عا-ما)$$

لہذا اس مستوی سے مجسم کے مرکز نقل (ب، ج، ح) کا مودی فاصلہ ہوگا

$$\frac{۱}{۲} - \left\{ \frac{ح}{ب} + \frac{ح}{ب} + ۱ \right\} \left\{ \frac{ح}{ب} + \frac{ح}{ب} \right\}$$

$$= \left\{ \frac{ح}{ب} + \frac{ح}{ب} \right\} \left\{ ۱ - \frac{ح}{ب} - \frac{ح}{ب} \right\}$$

$$= \frac{ح}{ب} + \frac{ح}{ب} - \left(\frac{ح}{ب} + \frac{ح}{ب} \right) = ۰$$

اس مساوات سے طہ ملتا ہے۔
جھکنے کے اثر کو سطحی مستوی سے ج فاصلہ پر ایک ایسا وزن ورکھنے سے
زائل کر دیا جاسکتا ہے کہ

$$و \times ج = ل$$

$$یا ۲۲ ن ج و = ۳۳۰۰۰ ط$$

پٹکھانی جہاز کی صورت میں جھکاؤ طوی سمت میں ہوگا اور اس صورت
میں ف طوی، پس مرکز می ارتفاع ہوگا۔
یہ قابل توجہ ہے کہ جھک جانے کی سمت گردش کے سمت کے مخالف
ہوتی ہے۔ مثلاً پٹکھانی جہاز کی صورت میں جو آگے کو جا رہا ہے سامنے کا حصہ
خفیف سا اٹھا ہوا ہوگا اور پیچھے کا خفیف ڈوبا ہوا۔

اچھال کی سطح بالعموم۔

— ۷۸

فرض کرو کہ ابتدائی آب خط تراش کے مرکز ہندسی میں سے گذرنے
والے انتصابی خط میں مبدایا گیا ہے۔ اگر ابتدائی تراش ی = ج ہو تو
خفیف طور پر ہٹائے ہوئے محل میں اس مستوی کی مساوات ہوگی

$$ی = ج + ل + لا + م + ما$$

جہاں ل، م چھوٹے ہیں۔

اگر ان دو محلوں میں (لا، با، ہی) اور (لا، ما، ہی) اچھال کے مرکوزوں
کے محدود کو تعبیر کریں تو

$$ح (لا - لا) = (ج - ی) لا فرما = ل + ف + م$$

$$ح (لا - با) = (ج - ی) ما فرما = ف + ل + ب + م$$

$$ح (ی - ہی) = (ج - ہی) لا فرما = ل + ۲ ف + ل + م + ب + م$$

$$جہاں لا فرما = لا فرما، ف = لا فرما، ب = لا فرما$$

$$\begin{aligned} \text{اب اگر } h \text{ اور } m \text{ کے نئے محل } h' \text{ اور } m' \text{ ہوں تو} \\ m' = h' - h + m + h \\ = m' + h + h' \end{aligned}$$

$$\text{لیکن } h' \times m' = h \times m + h \times h'$$

$$m' = h' - h + m + h' \quad \therefore \quad m' = h' - h + m + h'$$

جہاں m' سے h' تعبیر ہوتا ہے جو تیراؤ کی سطح کا نصف قطر انتخاب ہے۔

$$\text{اس لئے } m' = h' - h + m + h'$$

$$= h' - h + m + h'$$

پس معلوم ہوا کہ پس مرکز بلحاظ جہاز کے اوپر اٹھتا ہے اگر یہ تیراؤ کی سطح کے مرکز انحناء کے نیچے واقع ہو اور نیچے بیٹھتا ہے اگر یہ مرکز انحناء کے اوپر واقع ہو۔
۷۔ پیچ بانی جہاز (Screw-steamer) کا اپنے پیچ کے عمل کی

وجہ سے جھک جانا (Heeling over)۔

(یونیورسٹی آف گرین ہل (Prof. Greenhill) سے منسوب ہے)

(۷۷) اگر انجن کو پھرانے والا جفت فٹ پونڈوں میں L ہو اور فی گردشوں کی تعداد N تو ایک منٹ میں جو کام ہوتا ہے وہ $2\pi N L$ ہو گا۔ لیکن اگر انجن ط ایسی طاقت سے کام کر رہا ہو تو

$$\text{کام} = 2\pi N L$$

$$\therefore 2\pi N L = 2\pi N L$$

اگر ط وہ زیادہ ہو جس میں سے جہاز جھک جاتا ہے اور مرکز ثقل کے اوپر پس مرکز کا ارتقاع F ہو اور جہاز کا وزن ٹونوں میں W ہو تو

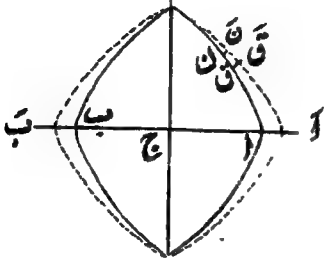
$$L = 2\pi N W \text{ فٹ جب ط}$$

$$\therefore 2\pi N L = 2\pi N W \text{ فٹ جب ط}$$

فاصل آب کے متوازی اور اس سے فری فاصلہ پر تراش لینے سے

فرج = ا فری

فرض کرو کہ ا ق ق ت ب فاصل آب
پر اس نئی تراش کا نکل ہے۔ تو فرج
ا ق ق ت ب اور ا ق ت ب کے
درمیان رقبہ کے جوہ کا معیار ہے۔



فرج = ا فری × مس و فرس

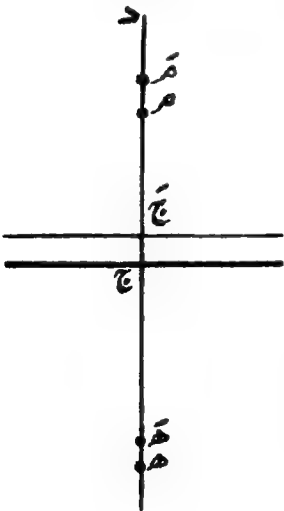
اور فرج = ا فری × مس و فرس

پس ا = ا فری = فرج / فرج

(۷۶)

ا = ر = ر = فرج - ا فرج = ا فرج - ا فرج

یا ا = ر + ا فرج



۶۔ بار میں اضافہ جہاز کے بار
میں اگر اضافہ کیا جائے تو اس کا اثر
مرکز مابعد کے محل پر۔

یہ مان کر کہ جہاز میں تشاگل کے
دو انتظامی مستوی ہیں فرض کرو کہ تیراؤ
کے مستوی کا مرکز ہندسی ج ہے ان میں
سے ایک مستوی میں تائیمیت پر غور کرو۔
بار میں خفیف اضافہ کی وجہ سے

فرض کرو کہ ج کا نیا مقام ج ہے اور مزید ہٹاؤ معاف سے تعبیر ہوتا ہے۔

رتبہ ن ق ن ق = ماط مس ع فرس

ج ف × (ل) = کرناط مس ع فرس

اور چونکہ ج ج = ر ط اور انتہا میں ج ف = ج ج اس لئے

ر ل = کرناط مس ع فرس

اس جگہ کو سب سے پہلے سی ڈیوپن (C. Dupin) نے اپنے ایک مقالہ میں سائنس کی اکاڈمی (Academie der sciences) کو متعلقہ اعم میں پیش کیا طولی تراش کے انحناء کے نصف قطر (ر) کے لئے بھی ایک متناظر جملہ صریحاً موجود ہے۔

۵۔ لیکلرٹ کا مسئلہ۔ اگر عرضی اور طولی ہٹاؤں کے لئے پس مرکزی بلندوں کو یعنی اچھال کی سطح کی عرضی اور طولی تراشوں کے انحناء کے نصف قطروں کو ر اور س سے تعبیر کیا جائے تو ہم جانتے ہیں کہ

$$r = \frac{H}{C} \text{ اور } s = \frac{H}{C}$$

جہاں ج اور ج فاصل آب کے جمود کے صدی میسار ہیں۔ لیکلرٹ نے ان مقداروں میں حسب ذیل روابط قائم کئے

$$r = \frac{فرج}{فرح} = r + \frac{ج فرج}{فرح} ، s = \frac{فرج}{فرح} = s + \frac{ح فرج}{فرح}$$

لیکلرٹ کے اس معنون کا ترجمہ مسٹر میری فیلڈا (Merrifield)

نے (The proceedings of the Institute of Naval Architects)

میں اور مارچ ۱۸۷۲ء کے (Messenger of Mathematics)

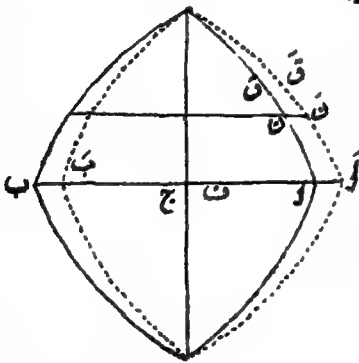
میں دیا ہے جو دو ثبوت وہاں دئے گئے ہیں ان میں سے پہلا حسب ذیل ہے۔ تاریخی دلچسپی کی خاطر اسکو یہاں بیان کیا جاتا ہے آئندہ دفعہ ۸۰ میں اس کا زیادہ باضابطہ ثبوت دیا جائیگا۔

جہاں و جہاز کا وزن ہے۔
عام طور پر معمولی ہٹاؤں کے لئے اچھال کا منحنی تقریباً دائرہ کی ایک
قوس ہوگا۔ دیوار پہلو جہاز کی صورت میں یعنی ایسے جہاز کی صورت میں جسکے
پہلو خط آب کے نزدیک انتصابی ہوں اچھال کا منحنی مکانی کی قوس
ہوتا ہے۔

جہاز کی صورت میں اگر اردھکے لئے مرکز مابعد ہر ہو تو حاصل ضرب
و ث ہر کو جہاز کا استحکام (Stiffness) کہتے ہیں۔
سمے — ڈیوین کا مسئلہ۔ سیدھا تیرنے والے جہاز کی صورت میں تیراؤ کی
سطح کی عرضی تراش کے انخاک نصف قطر ہوگا

$$r = \frac{K}{M \times S \times F}$$

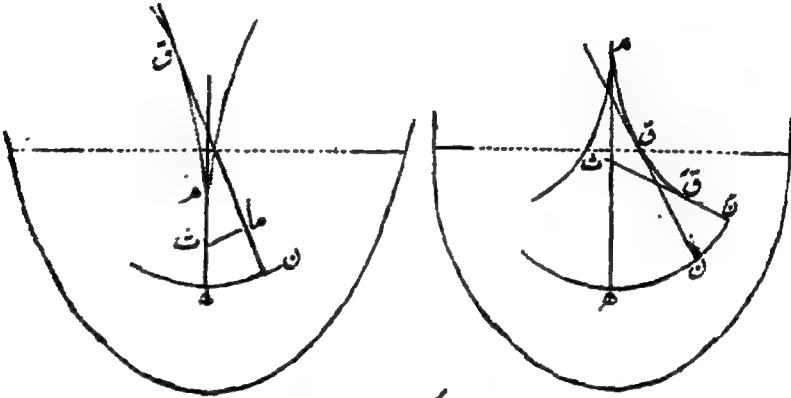
جہاں فاصل آب کے گھیرے کا عنصر فرس ہے، اس کا رقبہ ہے
اور جہاز کے پہلو کا انتصابی سمت کے ساتھ میلان ہے۔ اور محاور لا اور ما
جہاز کی اس تراش کے طولی اور عرضی محور ہیں جو تیراؤ کے مستوی سے قطع
ہوتی ہے اور یہ محور اس مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے گزرتے ہیں۔
اس کو ثابت کرنے کے لئے فرض کرو



کہ تیراؤ کی سطح کی عرضی تراش پر ج ج
د متصل نقطے ہیں اور ج ج کا ماسی مستوی
فاصل آب ان ق ب کے ساتھ
چھوٹا زاویہ طہ بناتا ہے اور فرض کرو کہ اس
ماسی مستوی سے جہاز کی جو تراش حاصل
ہوتی ہے اس کا ظل فاصل آب پر
ان ق ب ہے، اس طرح ج ج کا
ظل ف رقبہ ان ق ب کا مرکز ہندسی ہے۔ فرض کرو کہ متناظر عنصر

ن ق ن ق ہیں اور ان ق = فرس تو (۵۰)

یا اقل انحراف کا نقطہ ہے۔ ان میں سے پہلی صورت میں برویج کا قرن نیچے کی طرف



نکھلا ہے اور دوسری صورت میں اوپر کی طرف نکھلا ہے۔

شکلوں سے ہٹاؤ کے اثرات فوراً ظاہر ہو جاتے ہیں۔

پہلی صورت میں تقویمی معیار اگر (Righting moment) جو ہٹاؤ کے دئے ہوئے زاویہ کے لئے قائمیت کا سکونیاتی ناپ ہے ث م کے متناسب ہے جو نقطہ سے ماس ن ق بدعمود ہے اور ہٹاؤ کے زاویہ کے بڑھنے سے بڑھتا ہے۔

دوسری صورت میں تقویمی معیار اعظم قیمت اختیار کرتا ہے اور پھر گھٹتا ہے اور اس محل بعد دم ہو جاتا ہے جو ماس ث ق ن سے ماسل ہوتا ہے۔ یہ توازن کا ایک محل ہے لیکن ایسے توازن کا جو غیر قائم ہے کیونکہ عام جیلی قانون کے مطابق قائم اور غیر قائم توازن کے محل باری باری سے یکے بعد دیگرے وقوع پذیر ہوتے ہیں۔

اگر ث کو مبداء ان کرا چھال کے منحنی کی مساوات ح = ن (ن) حاصل کی جائے تو

ث م = ف ر

فر

اور تقویمی معیار ہوگا و ف ر

۷۲۔ گزشتہ دفعہ میں یہ بات فرض کر لی گئی ہے کہ سیالی دباؤ کے عمل کا انتصابی خط ایک خفیف ہٹاؤ کے بعد ھٹ کو قطع کرتا ہے۔ یہ صرف اس وقت درست ہوگا جبکہ ہٹاؤ کی سطح مستوی نقطہ ھ پر اچھال کی سطح کی صدری تراشیں ہو۔ جب یہ صورت نہ ہو تو ہٹاؤ کے انتصابی مستوی پر خط عمل کا ظل، ھٹ کو نقطہ ھ پر قطع کرے گا جو سطح کی عمادی تراشیں کا مرکز اٹخا ہوگا۔

اس لئے نقطہ ھ پر اچھال کی سطح کی کسی عمادی تراش کے اٹخا کا نصف قطر $\frac{H}{2}$ ہوگا اور اگر تیراؤ کے مستوی کے جوہ کے صدری معیار اس کے مرکز ہندسی پر $\frac{H}{2}$ سے ہوں تو اچھال کی سطح کے اٹخا کے صدری نصف قطر ھ پر

$$\frac{H}{2} \text{ اور } \frac{H}{2}$$

ہونگے اور اس کی صدری تراشیں تیراؤ کے مستوی کے صدری محوروں کے متوازی ہونگی۔

۷۳۔ قدیم ایک نہایت اہم صورت پیش ہوتی ہے۔ یعنی ایک جہاز کے توازن کی قائمیت کا سوال جبکہ رولنگ (Rolling) کی وجہ سے اس کے محل میں ہٹاؤ پیدا ہو۔

عام طور پر جہاز کے لئے اچھلنے (Tossing) کے بغیر رولنگ ممکن نہیں ہے کیونکہ جہاز کے دونوں سرے غیر متشاکل ہوتے ہیں۔ لیکن ایک بہت لمبے جہاز کی صورت میں جیسے کہ عام طور پر بحر اوقیانوس (Atlantic Ocean) میں چلنے والے جہاز ہوتے ہیں یہ مان لیا جاسکتا ہے کہ جہاز ایک مستوی سے جو اس کے طول پر عمود دار ہو متشاکل تقسیم ہو سکتا ہے۔ اس صورت میں جہاز میں متشاکل کے دو انتصابی مستوی ہونگے۔ اور اس لئے انتصابی خط ھٹ تیراؤ کے مستوی کے مرکز ہندسی ج میں سے گزرے گا۔

نیز خط ھٹ اچھال کے سطح کو متشاکل تقسیم کرتا ہے اور نقطہ ھ اعظم

۶۹۔ قائیت کے شرائط کا کافی ہونا۔ تیراؤ کے مستوی میں، کسی ایسے محور کے گرد جو پانی تراش یا فاصل آب کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اگر چھوٹا گھماؤ یا گردش ط لی جائے تو یہ گردش دو گردشوں ط، طہ کا مرکب خیال کی جاسکتی ہے جنہیں بالترتیب فاصل آب کے صدری محوروں کے گرد لیا جائے۔ ان میں سے ہر گردش علیحدہ طور پر ایک استروادی جفت پیدا کرتی ہے اور اس لئے ہٹاؤ کے پیدا کرنے میں بیرونی عامل کا کل کام یا توانائی بالقوہ میں اضافہ ہوگا

ط ج ث (ج۔ ح × ھ ث) ط + ط ج ث (ج۔ ح × ھ ث) ط
جس سے یہ نتیجہ مستنبط ہوتا ہے کہ شرائط ھ ث > ط ج اور نیز > ط ج۔ ایسے ہٹاؤں کے لئے قائیت کی کافی شرطیں ہیں جن سے ہٹائے ہوئے مانع کے حجم میں تغیر واقع نہیں ہوتا۔

۷۰۔ قائیت کے مسئلہ پر بحث کسی قدر مختلف پیرایہ میں ہو سکتی ہے۔ مرکز البعد یا پس مرکز کی یہ تعریف کہ وہ خط ھ ث اور ایک خفیف ہٹاؤ کے بعد اچھال کے نئے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط کا نقطہ تقاطع ہے ہمیں مسئلہ ذیل کی طرف بہتری کرتی ہے۔

پس مرکز اچھال کے منحنی کے اس نقطہ پر کہ مرکز انحصار ہے جہاں پر ھ ث میں گزرنے والا انتصابی خط اس منحنی سے ملتا ہے۔

یہ صاف ظاہر ہے کیونکہ نقطہ ھ ث منحنی کے متصلہ عا دوں کا نقطہ تقاطع ہے۔ پس اس سے یہ ظاہر ہوتا ہے کہ کسی ہٹاؤ کے لئے بشرطیکہ ہٹایا ہوا حجم وہی رہے، سیالی دباؤ کی سمت ہمیشہ اچھال کے منحنی کے برہیجہ کا انتصابی

لے اس قسم کے ہٹاؤ میں جو کام ہوتا ہے اس کے مجموعہ میں ط، طہ والی رقم خالی نہیں ہوتی۔ اس کو دفعہ آئندہ ۷۱ کی طرح ثابت کیا جاسکتا ہے۔

$$= ھ = ھ = لا - لا$$

$$= ط لا لا فر لا فر$$

ح

اسلئے ھ مر = ح (ا م) جہاں (ا م) گردش کے محور کے گرد جسم کی اوس

تراش کا محور کا معیار ہے جو تیراؤ کے مستوی سے قطع ہوتی ہے۔
اس لئے جسم کو اپنے اصلی محل کی طرف لیجانے کا میدان رکھنے والا جنت
یعنی استردادی جنت ہے

ج ش ح (ھ مر - ھ ش) = ج ش (ا م - ح ھ ش)

۶۷۔ اب چونکہ جسم کی سطحی تراش کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے صدی محور
دو ہوتے ہیں جن کے جواب میں جوہر کے معیار ج، ح، ج، ہونگے، اس لئے
ان میں سے ہر محور کے گرد کھلاؤ ہٹاؤ کے مستوی میں ایک جنت پیدا کرے گا
جو جسم کو متوازن کرنے کا میدان رکھے گا اگر ھ ش > ح > ج ہوگا
پس یہ شرطیں توازن کی قانینیت کے لئے ضروری ہیں۔

۶۸۔ کام جو ہٹاؤ پیدا کرنے میں کیا جاتا ہے۔ جب جسم کو ایک چھوٹے
زاویہ ط میں سطحی تراش کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے ایک صدی محور
گرد پھرایا جائے تو جسم پر عمل کرنے والا جنت ہوگا

ج ش (ا م - ح ھ ش) ط

اس لئے ط میں ایک چھوٹی مقدار فرطہ کا اضافہ پیدا کرنے کے لئے ضروری مل

جو کام کرے گا وہ = ج ش (ا م - ح ھ ش) ط فرطہ
میکمل اسے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ زاویہ ہٹاؤ ط کے پیدا کرنے میں جو کام کیا جاتا ہے وہ
= ۱/۲ ج ش (ا م - ح ھ ش) ط

میں ثابت کیا گیا تھا۔

اب ہٹائے ہوئے محل میں جسم پر مساوی مگر متقابل دو متوازی قوتیں عمل کرتی ہیں یعنی ایک قوت اس کا وزن وریج ΣW جو نقطہ Σ میں سے انتصائباً نیچے وار عمل کرتا ہے اور دوسری اچھال کی قوت جو نقطہ Σ میں سے انتصائباً اوپر وار عمل کرتی ہے۔ یہ قوتیں ایک جنت بناتی ہیں۔ اس جنت کا مستوی گردش کے محور پر علی التوالم ہوگا صرف اُس صورت میں جبکہ فاصلہ Σ ایک ایسے انتصائبی مستوی میں واقع ہوں جو واپر عمود وار ہے۔ یعنی اگر $\Sigma = \Sigma$

یا Σ (ری + لاط) فرلا فرما = Σ ری فرلا فرما

جو Σ لاما فرلا فرما = Σ ، میں تحویل ہو جاتا ہے جس کے

یعنی ہیں کہ گردش کا محور و ما جسم کی آس تراش کا جود کا صدری محور ہونا چاہیے جو تیراؤ کے مستوی سے قطع ہوتی ہے۔

جب یہ شرط پوری ہو تو Σ میں سے گزرنے والا انتصائبی خط Σ کو ایک نقطہ Σ پر قطع کرے گا جسکو ہم مرکز ابعد یا پس مرکز کہیں گے۔

جسم پر عمل کرنے والا جنت Σ و Σ Σ ط ہے

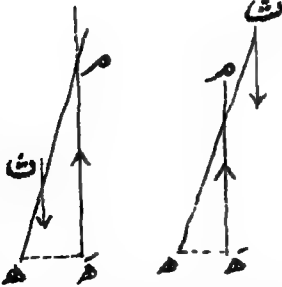
جسم کو اپنے اصلی محل پر لیجانے کا میلان

رکھتا ہے اگر Σ ، Σ کے اوپر واقع

ہو یا یہ اصلی ہٹاؤ کو بڑھانے کا میلان

رکھتا ہے اگر Σ ، Σ کے نیچے واقع ہو۔

نیز حاصل ہوتا ہے Σ Σ Σ



یہ اس جملہ میں تحویل ہو جاتا ہے $\text{لا فلا فرما} =$ جس کے یہ معنی ہیں

کہ سطحی تراشش کا مرکز ثقل دما پر واقع ہونا چاہیے جیسا کہ دفعہ ۵۲ میں نمائش کیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ پیش شرط پوری ہوتی ہے۔ ابتدائی محل میں مرکز ثقل لا اچھال کا مرکز ھ ایک ہی انضمامی خط میں واقع ہوتے ہیں اور اچھال کے مرکز کے محدودوں کو ہم (لا، ما، می) سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ نیز ہم دیکھتے ہیں کہ لا کے لئے (لا، ما، می) وہی ہیں۔ ہٹائے ہوئے محل میں اچھال کا مرکز مقام ھ پر چلا جاتا ہے اور فرض کرو کہ ھ کے محدود ابتدائی محوروں کے حوالے سے (لا، ما، می) ہیں۔

اب $\text{ح لا} = \text{لا لا ی فرلا فرما}$ ، $\text{ح ما} = \text{لا ما ی فرلا فرما}$

$\text{ح می} = \text{لا می ی فرلا فرما}$

جہاں عنصری ستون ن ق کے حجم کو ی فرلا فرما لیکر اس کے مرکز ثقل کو اس کے طول کے وسطی نقطہ پر لیا گیا ہے اور یہ سبکے اس بنا پر لکھے گئے ہیں۔

ہٹائے ہوئے محل میں متناظر عنصری ستون ن ق ہو گا جس کا طول $\text{ی} + \text{لا}$ ہے۔ اس کا مرکز ثقل ن سے $\frac{1}{2} (\text{ی} + \text{لا})$ فاصلہ پر واقع ہے اور اس لئے ن سے $\frac{1}{2} (\text{ی} - \text{لا})$ فاصلہ پر۔ اسلئے

$\text{ح لا} = \text{لا لا (ی + لا)}$ ، $\text{ح ما} = \text{لا ما (ی + لا)}$ ، $\text{ح می} = \text{لا می (ی + لا)}$

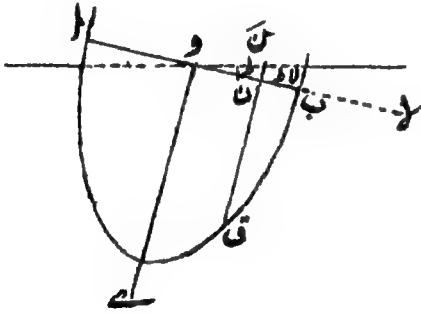
$\text{ح می} = \text{لا می (ی - لا)}$ ، $\text{ح لا} = \text{لا لا (ی - لا)}$

ہم دیکھتے ہیں کہ چھوٹے زاویہ ط کی پہلی قوت تک $\text{می} = \text{می}$ اور اس لئے اچھال کی سطح کا ماسی مستوی، تیراؤ کے مستوی کے متوازی ہے جیسا کہ دفعہ ۵۲

فرض کیا ہے تو جسم کے محل میں ان تبدیلیوں کے اثرات پر الگ الگ غور کیا جاسکتا ہے۔
اب ہم ایک چھوٹے زاویہ میں مٹاؤ کے اثر پر یہ فرض کر کے غور کریں گے کہ ہٹائے
ہوئے سیال کا وزن نہیں بدلتا۔ اور اس لئے سیالی دباؤ جسم کی کمیت کے مرکز
کو اٹھانے یا بٹھانے میں کوئی میلان نہیں رکھتا۔

۶۶۔ ایک ٹھوس جسم سکون کی حالت میں ایک متجانس مائع میں تیر رہا
ہے اسکو ایک ذرے ہوئے انتصابی مستوی میں، ایک چھوٹے زاویے
میں سے گھمایا گیا ہے۔ یہ معلوم کرنا مطلوب ہے کہ سیالی دباؤ جسم کو اپنے
ابتدائی محل میں لیجانے کا میلان رکھے گا یا نہیں۔

فرض کر دو کہ محور ما کے گرد جو تیراؤ کے مستوی او ب میں واقع ہے
جسم کو چھوٹے زاویہ ط میں سے گھمایا گیا ہے، و ما کا نذ کے مستوی پر علی التوازن



ہے ابتدائی محل میں ولا تیراؤ کے
مستوی میں اور وی انتصابی
واقع ہے۔ فرض کر دو جیسے جسم
گھمایا جاتا ہے یہ محور اس کے
ساتھ ہی جاتے ہیں۔

اگر تیراؤ کے مستوی پر رقبہ
کا عنصر فر لا فر ما سے تعمیر ہو تو
عنصری ستون ناق کا حجم

می فر لا فر ما ہو گا جہاں ی طول ناق کو تعمیر کرتا ہے ہٹائے ہوئے محل میں
متناظر ستون ناق کا طول ی + لا ط اور اسکا حجم (ی + لا ط) فر لا فر ما ہے۔
پس ہٹائے ہوئے سیال کا حجم ح دونوں صورتوں میں وہی ہو گا اگر

$$\text{کر (ی + لا ط) فر لا فر ما} = \text{ح} = \text{کر ی فر لا فر ما}$$

جہاں تکمیلے جسم کی اُس تراز پر لے گئے ہیں جو ابتدائی محل میں تیراؤ کی سطح سے
قطع ہوتی ہے۔

(۸۲)

پانچم

تیرنے والے جسموں کے توازن کی قائمیت

۶۵۔ اگر ایک تیرنے والے جسم کے محل میں کسی سمت میں حنیف سا ہٹاؤ پیدا کیا جائے تو عام طور پر جسم یا تو اپنے اصلی محل پر واپس ہونگی طرف مائل ہوگا یا اس محل سے اور دور ہٹنے کا رجحان رکھے گا۔ ہٹاؤ کی اس خاص سمت کے لئے صورت اول میں توازن کو قائم اور صورت دوم میں غیر قائم کہتے ہیں۔

پہلے اچھوٹے انتصابی ہٹاؤ پر غور کرو۔ اگر جسم متجانس سیال میں جزو غرق شدہ ہو یا ایک غیر متجانس سیال میں جس کی کثافت گہرائی کے ساتھ بڑھتی ہے جزو یا کلاً غرق شدہ تیر رہا ہو تو یہ ظاہر ہے کہ اس کو دبا کر نیچے اتار دینے سے ہٹائے ہوئے سیال کا دباؤ بڑھ جائے گا اور برخلاف اس کے اسکو اوپر اٹھانے سے یہ دباؤ گھٹ جائیگا۔ اس لئے ہر صورت میں سیالی دباؤ کا میلان جسم کو اس کے سکون کے محل کی طرف لیجانے کا ہوگا۔ اور اسلئے انتصابی ہٹاؤ کا لحاظ کرتے ہوئے توازن قائم ہے۔

لیکن یہ یاد رہے کہ یہاں صرف غوس اجسام کے لئے ثابت کی گئی ہے۔ ہٹاؤ کی وجہ سے دباؤ میں جو اضافہ ہوتا ہے اگر اس سے تیرنے والے جسم کے کسی حصہ میں یکجہ پیدا ہو جائے تو توازن کا قائم ہونا ضروری نہیں بلکہ فی الحقیقت یہ غیر قائم ہو سکتا ہے۔

کسی اختیاری ہٹاؤ سے عام طور پر جسم کے محل میں انتصابی اور زائوی دونوں تبدیلیاں وقوع پذیر ہوتی ہیں۔ لیکن اگر ہٹاؤ چھوٹا ہو جیسا ہم نے

۳۳ — کسی عمودی تراش کا ایک اسطوانی ظرف اس طرح تیار ہا ہے کہ اس کے محور کا ۲ ج طول غرق ہوتا ہے جب کہ محور انتصابی ہو۔ ثابت کرو کہ اچمال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

جہاں انتصابی حالت میں محور کا جو حصہ غرق ہوتا ہے اس کا وسطی نقطہ مبدا رہے محوری انتصاباً اور پر دار ہے اور محاور لا، ا عمودی حالت میں تیراؤ کی مستوی سطح کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے جمود کے معیاروں کے صمدی محوروں کے متوازی ہیں اور تیراؤ کی سطح کے ان محوروں کے لئے گردش کے نیم قطب ہیں۔

کر دیا گیا ہے۔ مانع کی کثافت ٹ ہے اگر مخروط اس طور تیر رہا ہو کہ اس کا قاعدہ پوری طرح غرق ہو اور اس کا محور انتہائی سمت کے زاویہ طہ بنائے تو ثابت کرو کہ

$$ف^۲ (ٹ - ٹ) = \{ (جم ط + ع) (جم ط - ع) \} = \frac{۵}{۲} = ڈکٹ جم ط جم ع$$

۳۰۔ انتہا چھوٹا برف کا ٹکڑا جس کی شکل قائم مسد یا اسطوانہ خیال کیجا سکتی ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتہائی ہے۔ جو حصہ غرق ہے اُس برف کے دوسرے ذرات آکر جیتے جاتے ہیں اس طور پر کہ اس کی اسطوانی شکل برقرار رہتی ہے اور اس کے محور اور نصف قطر میں مساوی وقت میں مساوی اضافہ ہوتا ہے۔ غیر غرق شدہ حصہ کی انتہائی شکل معلوم کرو۔ اگر برف کی کثافت اصنافی ۹۶ ہو تو ثابت کرو کہ اس کی سطح منحنی

$$ا^۲ (۹ - لا - لا) = ۲ = ۱$$

کی گردش سے حاصل ہوگی۔

۳۱۔ ایک مساوی الاضلاع مثلث ایک مانع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت مثلث کی کثافت کا چار گنا ہے۔ اچھال کی پوری سطح دریافت کرو۔ اور ثابت کرو کہ اُن لفظ طہ چھال انحناء غیر مسلسل ہے منحنی کے مانع زاویہ

$$مس - ۱ = \frac{۳۱۸۱۲}{۱۰۶}$$

پر ایک دوسرے کو قطع کرتے ہیں۔

۳۲۔ ایک ٹھوس چوستیوں لا = ڈا = ڈب = ڈی = بی = ج سے محدود ہے پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ قاعدہ ی = ۰ پوری طرح غرق ہے۔

ثابت کرو کہ ایسے ہٹاؤں کے لئے جن میں غرق شدہ حجم مستقل رہے اور قاعدہ پوری طرح پانی کے اندر اور اس کے مقابل کایع پوری طرح پانی کے باہر رہے اچھال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{۱}{۳} - \frac{۸}{۳} \frac{وب ی}{ح} = \frac{۱}{ب} + \frac{۲}{ا}$$

کا فاصلہ ج ہے۔

۲۵ — ایک قائم محزوط نیچے دار راس کے ساتھ ایک سیال میں تیرا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اگر توازن کے محل میں اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ ط بنا سکے تو ثابت کرو کہ

$$۵ \text{ جم عم قاط (جم ط - جب ۲ ع)} = ۴ \sqrt{۲} \text{ م} = \frac{۴}{\sqrt{۲}}$$

جہاں عم محزوط کا نصف زاویہ راس اور ثلث اس کی کثافت اور ث سیال کی اس گہرائی پر کثافت ہے جو محزوط کے اہل ضلع کے مساوی ہے۔

۲۶ — ایک قائم الزاویہ مثلث منشور ایک سیال میں جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیرا ہے کہ اس کا زاویہ قائم غرق ہے اور کنارے افقی ہیں۔ ثابت کرو کہ اچھال کے سختی کی شکل ہے

$$ز جب ۲ ط جم ۲ ط = گ$$

۲۷ — لنگر چھلے کی شکل کی ایک جان پٹی ہے جس کی تکوین ایک دائرہ سے ہوئی ہے جس کا نصف قطر ہے۔ یہ جان پٹی بانی میں تیر رہی ہے اس طور پر کہ اس کے خط استوا میں سے گزرنیوالی مستوی سطح افقی ہے۔ ثابت کرو کہ غرق شدہ گہرائی می مساواتوں

$$۵ = (۱ - جم ۲)$$

$$۲۲ م = (۲ - جب ۲ ب)$$

سے حاصل ہوگی جاں میں جان پٹی کے مادے کی کثافت نوعی ہے۔

۲۸ — ایک مکافی پتر ایک دوہرے معین سے محدود ہے جو محور پر عمودوار ہے اور نیچے دار راس کے ساتھ ایک مانع میں تیرا ہے اسطور پر کہ اس کا اسک مانع کی سطح میں ہے اور اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ من اعلا بنا ہے۔ ثابت کرو کہ مانع کی کثافت اور پتر سے کی کثافت میں ۲۱۶ : ۱۱ کی نسبت ہے اور محدودہ کرنے والے معین کا طول وتر خاص کا تین گنا ہے۔

۲۹ — ایک ٹھوس محزوط جس کا ارتفاع ف، کثافت ث اور زاویہ راس ۲ ع ہے اپنے راس کے گود آزادانہ گردش کر سکتا ہے۔ اس کا راس مانع کی سطح کے اوپر بلندی د پر ثابت

پانی پر ساکن ہے اس طور پر کہ اس کا زیر ترین نقطہ خول کو مس کرتا ہے اور خول پر کوئی دباؤ نہیں ڈالتا۔ اگر آزاد سطح خول کی کوریڈر کنارے میں سے گزرے تو ثابت کر دو کہ

کرہ کی کثافت : پانی کی کثافت :: ۱۲۸ : ۱۸۹

۲۱ — ایک مساوی الساقین مثلثی پتھر Δ ب ج (زاویہ ج قائمہ) ایک مائع میں جسکی کثافت ایسے ہلتی ہے جیسے گہرائی اس طرح تیرا ہے کہ اس کی سطح مستوی انتصابی ہے اور اس کا زاویہ ج پانی میں غرق ہے اگر Δ ب انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ $\frac{\pi}{4}$ + طہ بنائے تو ثابت کر دو کہ توازن کے دونوں محلوں میں جن میں Δ ب افقی نہیں ہوتا طہ کی قیمت شکل ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی

$$م جب طہ = (جب طہ + جم طہ)^2$$

۲۲ — ایک قائم مستدیر اسطوانہ میں جس کا محور انتصابی ہے مائع کی کچھ مقدار ہے جس کی کثافت ایسے ہلتی ہے جیسے گہرائی اس میں مساوی قاعدہ کا قائم مخروط جس کا محور اسطوانہ کے محور پر منطبق ہوتا ہے نیچے وار اس کے ساتھ آہستہ آہستہ غرق ہونے کے لئے چھوڑ دیا گیا ہے اگر مخروط توازن میں ہو جبکہ وہ مائع میں عین غرق ہو تو ثابت کر دو کہ مخروط کی کثافت اس گہرائی پر مائع کی ابتدائی کثافت کے مساوی ہوگی جو مخروط کے محور کے $\frac{1}{4}$ طول کے مساوی ہے۔

(۶۶)

۲۳ — ایک ٹکڑا مخروط جس کا ارتفاع h ، زاویہ راس 2α ، کثافت ρ ہے اپنے راس کے گرد حرکت کر سکتا ہے۔ اس کا راس ایک مائع کی سطح کے نیچے گ گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ یہی گہرائی پر مائع کی کثافت ρ_0 ہے۔ مخروط متوازن ہے اس طور پر کہ اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ طہ بناتا ہے اور اس کا قاعدہ مائع کی سطح کے باہر ہے۔ ثابت کر دو کہ

$$م گ^2 = (جم طہ + جم طہ) (جم طہ - م)$$

۲۴ — ایک کھوکھلا مکانی نابرتن جس میں ایک وزن دار کرہ پڑا ہوا ہے پانی میں جبر رہا ہے۔ اس کے راس پر ایک سوراخ ہونے کی وجہ سے برتن اور کرہ کی درمیانی فضا پانی سے بھری ہوئی ہے۔ اگر کرہ برک کا حامل دباؤ اس پانی کے نصف وزن کے مساوی ہو جو کرہ کے بھرنے کے لئے درکار ہوتا ہے تو ثابت کر دو کہ پانی کی سطح کے نیچے کرہ کے مرکز کی گہرائی $\frac{2}{3}$ ہے جہاں مکانی مٹا کا وتر خاص m د اور اس سے تماسی مستوی

کے فاصلہ کا مربع وتر خاص کے متناسب معکوس میں ہوگا۔

۱۵۔ چھوٹی موٹائی کا ایک کھوکھلا لکھت کر دی پالہ ایسے ڈھکنے سے بند ہے جو اسی شے کا بنا ہوا ہے اور موٹائی وہی ہے جو پالہ کی ہے۔ اگر پالہ ایک مانع میں تیرا ہوا طور پر کہ اس کا مرکز مانع کی سطح میں ہو تو ثابت کرو کہ ڈھکنے کا میلان انحصاری سمت کے ساتھ ہوگا۔

۱۶۔ ایک قائم مستدیر مخروط کا مستوی قاعدہ ناقص کی شکل لے۔ یہ مخروط اس طرح تیرا ہے کہ اس کا طویل ترین کون افقی ہے۔ اگر زاویہ راس ۲۰° ہو اور مستوی قاعدہ اور قلیل ترین کون کا درمیانی زاویہ بہ ہو تو ثابت کرو کہ

۵ مم ب = ۵ مم ۴ = ۴ مم ۴۔ قائم مستدیر مخروط کا ارتفاع قاعدے کے قطر کے مساوی ہو تو مخروط اپنے سے بڑی کثافت والے کسی مانع میں تیرے گا اس طور پر کہ اس کا مائل ضلع افقی ہو۔
۱۸۔ ایک مخروط کا ارتفاع ۴ فٹ اور زاویہ راس ۲۰° ہے اس کا راس ایک مانع کی سطح کے نیچے گ گہرائی پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ توازن کی حالت میں اس کا قاعدہ مانع کے عین باہر ہوگا اگر

شگ ۴ جم ۲ جم ط = ۴ فٹ (جم ط - ۴ جم ط + ۴)

جہاں ش اور ت بالترتیب مانع کی اور مخروط کی کثافتیں ہیں۔ اور ط مساوات گ جم ۴ = ۴ فٹ جم ط + ۴ سے حاصل ہوتا ہے۔

۱۹۔ ایک ذرا رتبتہ السطوح (چار طہی) پانی میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ایک کونہ غرق ہے اس کونہ پر سٹنے والے تینوں کناں سے مساوی اور ایک دوسرے کے علی التوا قائم ہیں۔ ثابت کرو کہ توازن کے محل ایک، یا دو، یا تین ہونگے۔ ہو جب اس کے کہ چار طہی کی کثافت کو پانی کی کثافت سے جو نسبت ہے وہ ۴ : ۲۰ سے بڑی ہو یا مساوی یا چھوٹی۔

۲۰۔ ایک نصف کر دی خول (نصف قطر ۲) جس میں پانی ہے اپنے محور کے گرد جواز تنصافی سے $\frac{3\pi}{4}$ کی زاویہ رفتار سے گھوم رہا ہے۔ ایک کرہ (نصف قطر ۱)

یہ مخروط اسطور پر توازن میں ہے کہ اس کا مائل منسلع انتصابی اور اس کے قاعدہ کا زیر ترین نقطہ پانی کی سطح کو عین مس کرتا ہے۔ مخروط کی کثافت کا پانی کی کثافت سے مقابلہ کرو

۹۔ منحنی $\frac{1}{4}$ - لوک $\frac{1}{4}$ کے کچھ حصہ کو اس کے متقارب کے گرد گھا کر ایک پیالے کی

منحنی سطح بنائی گئی ہے یہ پیالہ ایک مانع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی اور تنگ سرانچے وار ہے اور اس میں ایک زیادہ ترورنی مانع ڈال دیا گیا ہے، ثابت کرو کہ اگر پیالے کو مناسب وزن کا بنایا جائے تو دونوں مانعوں کی سطحوں کے درمیان فاصلہ مستقل رہے گا۔

۱۰۔ ایک اسطوانہ ایک مانع میں اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ مس $\frac{1}{4}$ بنا رہا ہے اور اس کا اوپر وار سرمانع کی سطح کے عین اوپر ہے۔ ثابت کرو کہ اسطوانہ کا نصف قطر اسکے ارتفاع کا پچھلے ہے۔

۱۱۔ ایک ہی شے سے بنے ہوئے دو ڈنڈوں کے سرے بائدہ دے گئے ہیں اور یہ ڈنڈے ایک مانع میں اس طرح تیر رہے ہیں کہ ان کا زاویہ مانع میں غرق ہے۔ ثابت کرو کہ اچھال کا منحنی، مکافی ہے۔

۱۲۔ ایک مخروط نیچے وار اور اس کے ساتھ پانی کے ایک اسطوانی برتن میں تیر رہا ہے۔ اسکو بغیر جھکانے کے پانی کی سطح سے عین باہر نکالا گیا ہے ثابت کرو کہ کام جو کیا گیا وہ ہے

(۲ ل - $\frac{1}{4}$ ل)

جہاں مخروط کا وزن دہے اور توازن کی حالت میں مانع کی سطح کے نیچے اس کی گہرائی ل ہے اور ل اسطوانہ کا وہ طول ہے جو توازن کی حالت میں مخروط کے ہٹاے ہوئے پانی سے بھرا جاسکتا ہے۔

۱۳۔ ایک قائم مستدیر اسطوانہ اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا ایک سر غرق ہے۔ تراؤ اور اچھال کی سطحیں معلوم کرو۔

۱۴۔ تجانس مادے کی ایک دی ہوئی مقدار سے ایک گروہنی مکافی بنا دیا گیا ہے جو نیچے وار اس کے ساتھ تیر رہا ہے۔ ثابت کرو کہ تیراؤ کے مستوی سے اس کے مرکز ثقل

پھر اس میں پانی ڈال دیا جائے اگر اوپر سے مخروط کا ارتفاع نیچے کے مخروط کے ارتفاع کا تین گنا ہو اور ان کی مشترک کثافت پانی کی کثافت کا چھ ہوتو ثابت کرو کہ جسم عین آئینے کو ہو گا جبکہ پانی اس کے اوپر کے سرے کے ستویں تک پہنچ جائے۔

۱۔ معلوم وزن اور حجم کا ایک مخروط نیچے وار راس کے ساتھ تیز رہا ہے۔ ثابت کرو کہ مخروط کی سطح جسکو اے مس کرنا ہے کم سے کم ہوگی جبکہ اس کا زاویہ راس $2 \sin^{-1} \frac{1}{3}$ ہو۔
 ۳۔ ایک مربع تختہ ایک دائرہ کے اندر جس کا کثافت اس کی کثافت کا چار گنا ہے رکھا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے تیرنے کے چار مختلف محل ہو سکتے ہیں جبکہ اس کا صرف ایک معلومہ کوئی دائرہ کی سطح کے نیچے ہو۔

۴۔ ایک جسم پانی میں تیز رہا ہے۔ ایک کھوکھلے برتن کا وزن ہمارے اس پر رکھا گیا ہے اور اسے نیچے دبا گیا ہے۔ جسم کے محل میں کیا ارتد وقوع پذیر ہوگا (۱) بلحاظ برتن کے اندر دئی گئی سطح کے (۲) بلحاظ برتن کے بیرونی دائرہ کی سطح کے۔
 ۵۔ ایک کھوکھلے نصف کرہ کی خول کے کنارہ کے ایک نقطہ پر ایک وزن دار ذرہ لگا دیا گیا ہے خول پانی میں اس طرح تیز رہا ہے کہ ذرہ پانی کی سطح کے عین اوپر ہے اور کنارہ کی سطح پانی کی سطح کے ساتھ زاویہ 53° بناتی ہے ثابت کرو کہ

نصف کرہ کا وزن $\frac{1}{2}$ اس پانی کا وزن جس میں سماسکتا ہے $2:3$ یا $5:6$ ۔
 ۶۔ ایک مخروط جس کا نصف زاویہ راس 30° اور محور کا طول 2 ہے انتہائی محور اور نیچے وار راس کے ساتھ ایک سیال میں تیز رہا ہے جسکی کثافت مخروط کی کثافت کا چھ ہے۔ ثابت کرو کہ اس کے قاعدہ کا محیط عین ڈوب جائیگا۔ اگر سیال، مثل ٹھوس کے مخروط کے محور پر منطبق ہونے والے انتہائی خط کے گرد $\frac{1}{2}$ کی زاویہ راس سے گھومتے۔
 ۷۔ ایک ٹھوس مخروط جس کے محور میں سے گزرنے والے ستویں سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے یہ حصے ایک فیصلے کے ذریعہ راس پر جوڑ دے گئے ہیں اور اس نظام کو پانی میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ راس نیچے وار اور محور انتہائی ہو۔ اگر حصوں کی علیحدگی کے بغیر نظام تیز رہا ہوتو ثابت کرو کہ ڈوبنے والے محور کا طول 2 جب سے بڑا ہے جہاں مخروط کے محور کا طول 2 اور اس کا زاویہ راس 2 ہے۔
 ۸۔ ایک مخروط کا راس ایک برتن کے پینڈے پر جس میں پانی ہے ثابت کر دیا گیا ہے۔

کے حجم اور $\frac{1}{2} \pi r^2$ ارتفاع کے مکانی نما کے حجم کے فرق کے مساوی ہوگا۔
پس اگر اسطوانہ کی کثافت ρ اور سیال کی کثافت ρ_1 ہو تو

$$\rho_1 \pi r^2 h = \rho \pi r^2 (h - x) \quad (1)$$

$$\text{اور } x = \frac{\rho}{\rho_1} h \quad (2) \quad \text{ن (اسطوانہ کا ارتفاع ہے)}$$

۶۴۔ زیادہ عام صورت ایسے جسم کی ہے جو جڑ یا کلا غرق شدہ ایسے مائع میں تیر رہا ہے جو معلومہ قوتوں کے زیر عمل ساکن رہے اور یہی قوتیں جسم کے سالمات پر بھی عمل کرتی ہیں۔ اگر جسم متوازن ہو تو اس پر کی حاصل قوت ہٹائے ہوئے مائع پر کی حاصل قوت کے مساوی ہوگی۔ اور ان قوتوں کے خطوط عمل وہی ہونگے۔

کیونکہ اگر جسم علیحدہ کر دیا جائے اور اس کی جگہ کو ہٹائے ہوئے مائع سے پر کر دیا جائے تو جسم پر سیال کا حاصل دباؤ وہی ہوگا جو ہٹائے ہوئے مائع پر ہے۔ اور اس لئے وہ ہٹائے ہوئے مائع پر کی حاصل قوت کے مساوی اور متقابل ہوگا۔

مثال۔ مائع کی کچھ کثیت ایسی قوت کے زیر عمل ساکن رہے جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ ہے اور جیسے بدلتی رہے جیسے اس مرکز سے فاصلہ ایک ٹھوس جسم مرکب کی قطار کی شکل کا اس میں جڑا غرق شدہ ساکن ہے۔ اس کا راس مذکورہ بالا ثابت نقطہ پر ہے مائع اور ٹھوس کی کثافتوں کا مقابلہ کرنا مطلوب ہے۔

توازن کی صورت میں فرض کرو کہ مائع کی آزاد سطح کا نصف قطر اور گروی قطار کا نصف قطر r ہے۔ قطار کے حجم کو ہٹائے ہوئے مائع کے حجم کے ساتھ $\frac{1}{2} \pi r^2 x$ کی نسبت ہوگی اور قوت کے مرکز سے ان کی کمیوں کے مرکزوں کے فاصلے x اور r کی نسبت رکھیں گے۔
اگر کثافتیں ρ اور ρ_1 ہوں تو $\rho_1 \pi r^2 x = \rho \pi r^2 r$

مثلاً

۱۔ دو قائم ہم محور مخروطوں کو جن کے راسی زاوئے θ وہی راسوں سے جوڑ کر ایک جسم بنایا گیا ہے۔ اس کی ایک برتن میں اس طرح رکھا گیا کہ اس کا ایک سر ابرتن کے افقی قاعدہ پر ٹکا ہوا ہے۔

جہاں $\text{ا} = \text{لا} \text{ا} \text{فرلا} \text{فرما}$ ، $\text{ھ} = \text{لا} \text{ا} \text{ما} \text{فرلا} \text{فرما}$ ، $\text{ب} = \text{لا} \text{ا} \text{ما} \text{فرلا} \text{فرما}$

اگر ہم تراش کے صدری محوروں کو محور لا اور محور ما فرض کریں تو $\text{ھ} = \text{ا} = \text{ب}$ ،
 $\text{ا} = \text{ح} \text{آ} = \text{ا} \text{ل} = \text{ح} \text{آ} = \text{ب} \text{م} = \text{ح} \text{آ} = \text{ج} = \text{ا} \text{ل} = \text{ب} \text{م}$
 اس لئے اچال کی سطح کی مساوات ہے

$$\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ب}^2}{\text{ح}^2} = \frac{\text{ا}^2}{\text{ح}^2} - \frac{\text{ج}^2}{\text{ح}^2}$$

۶۳۔ ایک گردشیں مجسم ایسے مانع میں تیر رہا ہے جو ایک انتصابی محور کے گرد گھوم رہا ہے گویا یہ ٹھوس ہے مجسم کا محور گردش کے محور پر منطبق ہوتا ہے۔ توازن کی شرط معلوم کرنا مطلوب ہے۔

گھومنے والے مانع کی کیت میں ایک گردشیں سطح کھینچو جس کا محور گھومنے والے مانع کے محور پر منطبق ہو۔ اس سطح کے اندرونی مانع کے توازن پر غور کرو۔ اس مانع پر سیالی دباؤں کا حاصل اس کے وزن کے مساوی ہونا چاہیے اس طرح اگر اس مانع کی جگہ کوئی مجسم لے لے تو اس کی سطح پر بھی یہی سیالی دباؤ عمل کریں گے اور اس لئے اس قسم کا مجسم متوازن ہوگا اگر اس کا وزن ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے برابر ہو۔ یہ قابل توجہ ہے کہ خواہ مجسم کیال کے ساتھ گھومے یا ان کی زاویہ رفتار مختلف ہو یا یہ ساکن ہو ہر صورت میں نتیجہ بالاصداق آئے گا۔
 مثال :- ایک اسطوانہ گھومنے والے مانع میں تیر رہا ہے جس گہرائی تک یہ ڈوبتا ہے اسے معلوم کرو۔

(۶۳)

اگر سہ زاویہ رفتار ہو تو آزاد سطح کے تلموینی مکانی کی مساوات اس کے اس کو مبدا قرار دینے سے $\text{ا}^2 = \text{ج}^2 + \text{ب}^2$ ہوگی۔ اور اگر تیراؤ کے دائرہ کے نیچے یعنی اس دائرہ کے نیچے جو آزاد سطح اور اسطوانہ کی سطح کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے اسطوانہ کے قاعدہ کی گہرائی ح ہو اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ر ہوئے ہوئے سیال کا حجم ح ارتفاع کے اسطوانہ

$$\frac{ج}{۱۳۳} = \frac{۱}{۲}$$

اسی طرح دفعہ ۴۰ (۲) سے

$$ج (۱ - ۱) = (۱۳ + ۵) (۱ - ۱) \leftarrow \frac{ج}{۳}$$

جس سے اچمال کی سطح کے لئے متناظر مقطوعہ نکلتا ہے۔

۴۲ — کسی تراش کا اسطوانہ۔

تیراؤ کی سطح فیٹا ہندسی کے خط و سے پر ایک نقطہ ہے جو $ج = ح$ سے حاصل ہوگا جہاں $د$ عمودی تراش اور $ح$ غرق شدہ حجم ہے۔

فرض کرو کہ قاطع مستوی کی مسادا ست

ی = ل + م + ج ہے اور سیدھا وقاعدہ

میں لیا گیا ہے۔

اچمال کے مرکز کے محدود (لا، ما، یا) (ی) ذیل کی مساداتوں سے حاصل ہوتے ہیں۔

ح لا = آر لای فرلا فرما، قاعدہ پیکل ہا گیا

= آر لا (ج + ل + م + ما) فرلا فرما

= اول + م

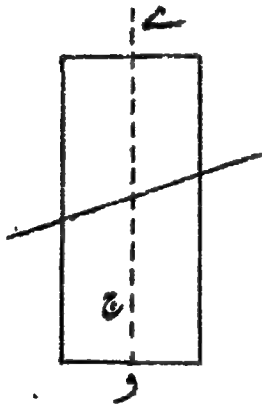
اسی طرح

ح ما = آر مای فرلا فرما

= ل + م

اور ح یا = آر یای فرلا فرما

= (اول + ل + م + م + م + م) + ج ل



اور اچھا لکھا ہوا نسخہ مکانی ۳ ماہ ۲۰ = ۱۲ لاکھ ہے۔

اس مکانی کے راس ہ پر انحناء کا نصف قطر $\frac{r}{2}$ ہے جو ہ گ سے کم ہے۔
اس طرح ظاہر ہے کہ اچھال کے منحنی کے تین عماد پہنچ سکتے ہیں جن سے توازن کے تین محل ملیں گے۔

۵۸۔ اگر جسم ایک پتر ہو جو ذراتی قوس سے محدود ہو تو منحنی متشابہ بنائے ہونگے۔

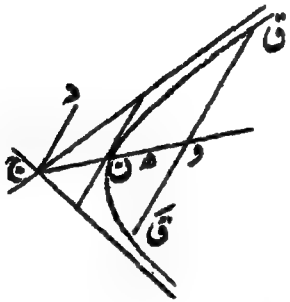
اگر قوتِ تیراؤ کا حفظ ہو اور ۲ و ۳ باب

ق ق کے متوازی اور اس کے مزدوج قطر

ہوں اور ان کے درمیان زاویہ طم ہو اس طرح

کہ وَاَبْ جِب طہ = واپ ، تو

بقية قنق = $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ - و جب طفرلا



$$= \left\{ \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \right) \sqrt{1 + \frac{y}{\beta}} - 1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \sqrt{1 + \frac{y}{\beta}} \right\}$$

اس طرح لاکھوں کے ساتھ یعنی جو کہ جن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ متقل ہے

三

(بقیہ) (ج ۵) = $r = \frac{b}{a}$ جب $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r} dx$ لا $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ فرلا

$$A^{\frac{r}{p}} \left(1 - \frac{y}{rA}\right) B A^{\frac{r}{p}} =$$

اور اس لئے جہ کو جن کے ساتھ جو نسبت ہے وہ مستقل ہے۔

یہ نتیجے خالص ہندی استدلال سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں۔

۵۹۔ ایک مستند و محروم کی صورت میں جو اس طرح تیر رہا ہے کہ اس کا اس آزاد سطح

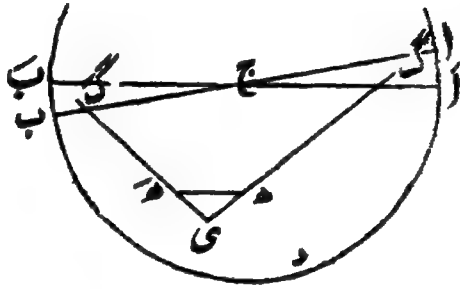
کے نیچے ہے تیراؤ کی اور اچھال کی سطحیں گردشیں زائد نہا ہو سکتی۔

اگر عہد کا راس واکسی تراش کا محور اعظم ج ب اور ا ب پر کا عہد وک

اگر جسم اس طرح حرکت کرے کہ ہٹائے ہوئے مانع کا حجم بدلے تو تیراؤ کی مستوی سطحوں کے انصاف کو تیراؤ کی سطح اور ھ کے طریق کو اچھا حال کی سطح کہتے ہیں۔

۵۔ اگر ایک مستوی حرکت کرے اس طور پر کہ اس سے ایک ٹھوس جسم کا ہمیشہ مستقل حجم قطع ہو اور اگر قطع شدہ حجم کا مرکز ہندی ہو تو ھ پر اس سطح کا ماسی مستوی جو ھ کا طریق ہے قاطع مستوی کے متوازی ہوگا۔

دوسرے الفاظ میں تیراؤ کی سطح کے کسی نقطہ پر اور اچھا حال کی سطح کے متناظر نقطہ پر کے ماسی مستوی ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔



قاطع مستوی ا ج ب کو ایک چھوٹے زاویہ میں بھراؤ فرض کرو کہ اس کا نیا مقام ا ج ب ہے قانون ا ج ب اور ب ج ب کے حجم مساوی ہیں۔

فرض کرو کہ ان قانون کے ہندی مرکز گ ا گ ہیں۔

گ ھ محدود میں نقطہ ی کو اس طور پر کہ

ی ھ : ھ گ :: حجم ا ج ب : حجم ا د ب

گ ی کو ملاؤ اور نقطہ ھ کو اس طور پر کہ

ی ھ : ھ گ :: حجم ب ج ب : حجم ا د ب

تو ھ ، ا د ب کا مرکز ہندی ہوگا۔

لیکن ی ھ : ھ گ :: ی ھ : ھ گ

اور اس لئے ھ ھ ، گ گ کے متوازی ہے۔

(۵۸)

جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر زاویہ ا ج ا کو لا انتہا کم کر دیا جائے تو انتہا میں

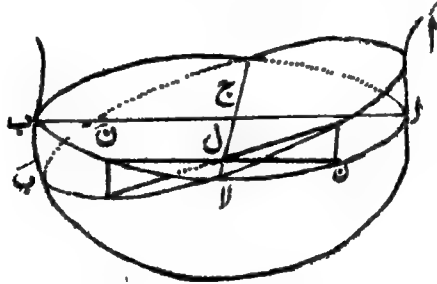
اس لئے قطع کردہ حجم بھی وہی ہونگے۔

کسی ٹھوس کی صورت میں اگر قاطع مستوی کو اپنے مرکز ہندسی کے گرد ایک بہت چھوٹے زاویہ میں گھمایا جائے تو تراشوں کو محدود کرنے والے سطحینوں کے نزدیک کی سطح بغیر کسی قابل قدر غلطی کے اسطوانی خیال کیجھا سکتی ہے۔ اور اس لئے مسئلہ بالا کی تصدیق ہو جاتی ہے۔
بالفاظ دیگر قاطع مستوی کے مقام میں تبدیلی سے حجم میں جو نقصان اور اضافہ ہوتا ہے ان دونوں کا فرق کسی ایک کے مقابلہ میں لا انتہا چھوٹا ہوتا ہے۔

۵۔ تعریضات۔ اگر ایک حجم متجانس مانع میں جیرا ہو تو مانع کی سطح حجم کو جن مستوی پر قطع کرتی ہے اس کو تیراؤ کا مستوی کہا جائے گا۔
ہٹائے ہوئے مانع کی کیت کا مرکز ھ اچھاں کا مرکز کہلاتا ہے۔

۱۔ حسب ذیل ثبوت بھی دیا جاسکتا ہے۔

فرض کرو کہ قاطع مستوی ا ج ب، ایک خط ج لا کے گرد ایک چھوٹے زاویہ (طہ) میں گھمایا گیا ہے اور اس کے عقبہ کا عنصر فرا ہے۔



تو قطع شدہ حجم میں جو اضافہ ہوگا اس کی جبری قیمت کرطہ ما فرا کے مساوی ہوگی۔ اب اگر یہ معدوم ہو جائے تو کرطہ ما فرا = ۰ ہو جس بات کی شرط ہے کہ ا کا مرکز ہندسی محور لا پر واقع ہو۔ اس طرح اگر ج کو مرکز ہندسی فرض کیا جائے تو ج میں سے گزرنے والا ہر مستوی اس شرط کو پورا کرے گا۔

معنی نہ رہے کہ قطع شدہ حجم کا جبری سمیار محور اس کے گرد کرطہ ما فرا ہے جو معدوم ہوگا اگر کرطہ ما فرا = ۰ یعنی اگر محور ج لا، ج مارقبہ کے صدری محاور ہوں۔

اگر یہ شرط پوری ہو تو جسم ساکن ہوگا اور ثابت نقطہ پر کا دباؤ ان دو وزنوں کے فرق کے مساوی ہوگا۔ اور مثال یہ ہو سکتی ہے کہ ہم ایسے ٹھوس جسم پر غور کریں جو پانی میں تیر رہا ہو اور ایک رسی کے ذریعہ نکالیا گیا ہو جو پانی کی سطح کے اوپر ایک نقطہ سے بندھی ہوئی ہے۔ تو ازل کی حالت میں رسی انتصابی ہوگی اور اس کے تناؤ اور حاصل سیالی دباؤ (جو مٹا ہے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہے) کا مجموعہ جسم کے وزن کے مساوی ہوگا۔ اس لئے رسی کا تناؤ جسم کے وزن اور مٹا ہے ہوئے سیال کے وزن کے فرق کے مساوی ہوگا اور یہ دونوں وزن ان فاصلوں کی نسبت معکوس میں ہونگے جو ان کے خطوط عمل اور ڈوری کے خط کے درمیان ہیں اور جیسے تینوں خطوط ایک ہی انتصابی ستوی میں ہونگے۔

۵۲۔ آئندہ کی تحقیق میں حسب ذیل ہندی مسئلے کا رد ثابت ہونگے۔

اگر ایک مستوی سطح ایک ٹھوس جسم کو قطع کرے اور اس مستوی کو ایک بہت چھوٹے زاویہ میں ایسے خط مستقیم کے گرد گھمایا جائے جو اسی مستوی میں واقع ہو تو قطع کردہ حجم وہی رہے گا بشرطیکہ خط مستقیم مستوی تراش کے رقبہ کے مرکز ہندی میں سے گزرتا ہو۔

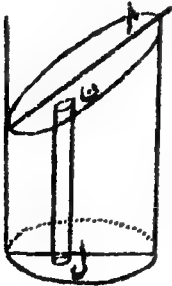
اس کو ثابت کرنے کے لئے کسی قسم کے ایک اسطوانہ پر غور کرو جس کو ایسی مستوی سطح قطع کرتی ہے جو اس کے قاعدہ کے ساتھ موازی ط بناتی ہے۔

فرض کرو کہ تراش کے مرکز ہندی کا حاصل اسطوانہ کے قاعدہ سے جی ہے اور تراش کے قاعدہ کا عنصر مع Δ اور مستویوں کا درمیانی حجم H ہے تو

$$H = \frac{\Delta \times N \times L}{2}$$

$$\Delta \times \text{جم ط} \times H = H \times (\Delta \times \text{جم ط} \times N \times L) = H$$

$H = H$ (قاعدہ کا رقبہ)



اب رقبہ Δ کا مرکز ہندی ان تمام تراشوں کا مرکز ہندی ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والے مستوی سطح کرتے ہیں۔ یہ باعث ان تراشوں کے ظل اسطوانہ کے قاعدہ پر پڑنے سے بخوبی ظاہر ہو جاتی ہے۔

اب چونکہ تمام تراشوں کے لئے H وہی ہے

اور ہٹائی ہو اکا کل وزن

$$\frac{\text{ج (ی + لا)}}{\text{ک}} = \frac{\text{ج}}{\text{ک}} \text{ لا}$$

$$\frac{\text{ج}}{\text{ک}} = \frac{\text{ج ی}}{\text{ک}} \text{ لا}$$

اب چونکہ غبارہ کی شکل دیگئی ہے اس لئے لا، لا کا ایک معلومہ تفاعل ہے اور اگر غبارہ اور اس کی اندرونی گیس کا وزن د ہو تو تفاعل کا تین و کو ہٹائی ہوئی ہو اس کے کل وزن کے مساوی رکھنے سے ہو جاتا ہے۔

۵۔ ایک متوازن ٹمپوس جسم کا غرق شدہ ایک مائع میں تیر رہا ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی جسم کی کثیت کے مرکز کی گہرائی معلوم کرو۔

فرض کرو کہ جسم کے بلند ترین اور زیر ترین نقاط کی گہرائیاں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ اور ۶ گہرائی پر اس کی افقی تراش کا قریب سے ہے اور اس گہرائی پر مائع کی کثافت ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ ہے

تو ہٹائے ہوئے مائع کا وزن = ج ی سے فری

فرض کرو کہ جسم کے حجم (ح) کے مرکز ہندسی کی گہرائی ۳ ہے تو

$$\text{ح} = \text{ج ی سے فری}$$

اس لئے ہٹائے ہوئے مائع کا وزن = ج ی سے فری ح، اور اگر جسم کی کثافت ۳ ہو تو اس کا وزن = ج ۳ ح اس لئے ۳ = ج ی سے فری جسم ایک ایسے محل میں تیر رہا ہے کہ اس کے حجم کے مرکز ہندسی کی گہرائی پر مائع کی کثافت جسم کی کثافت کے مساوی ہے۔ ۱۔ اگر ایک ٹمپوس جسم کسی قید کے تحت تیر رہا ہو تو توازن کی شرطیں قید کے حالات کی نوعیت پر منحصر ہوں گی لیکن ہر صورت میں قید کرنے والی قوتوں کا حاصل انتصافی سمت میں عمل کرے گا کیونکہ دوسری قوتیں (سیالی دباؤ اور جسم کا وزن) انتصافاً عمل کرتی ہیں۔ ۲۔ مثلاً اگر ٹمپوس جسم کا ایک نقطہ ثابت ہو تو توازن کی شرط یہ ہے کہ اس نقطہ کے گرد جسم کے وزن اور ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے معیار مساوی ہونے چاہئیں۔

کی مساوات ہو جاتی ہے

$$لا - ج = ا (۱ + جم ط) (لا - ج) = ۰$$

اس سے $لا = ج$ ملتا ہے جس سے $ا = ج$ حاصل ہوتا ہے اور $ب ج$ افقی قرار پاتا ہے جو صرف یکساں توازن کا محل ہے اور نیز

$$لا = \frac{۱}{۴} (۱ + جم ط) \pm \left\{ \frac{۱}{۴} (۱ + جم ط) - ج \right\}$$

$$= ا جم ط \pm (ا جم ط - ج)$$

اس لئے متساوی الساقین منشور کے توازن کا محل صرف ایک ہوگا تاہم کہ
 $ا جم ط < ج$

اور چونکہ $ت ج = ش$ اس لئے یہ

$$جم ط < ش$$

کے مثل ہے۔

مثال ۴۔ دی ہوئی شکل اور وزن کے غبارہ کے توازن کا محل معلوم کرو جبکہ کہ ہوائی کے مختلف ارتفاعوں پر پیش کے تغیرات نظر انداز کئے جائیں۔

پیش مستقل ہو تو ہی ارتفاع پر ہوا کا دباؤ $۴ = ش$ اور اس کی کثافت

$$= \frac{۴}{ش} \text{ تو } ش جہاں ۴ اس مستوی پر کے ہوائی دباؤ کو تعبیر کرتا ہے جہاں سے ارتفاع$$

کی پیمائش ہوئی ہے۔ متغیر کثافت کے طبقات کے سلسلوں پر مشتمل ہوگی اور اگر غبارہ کے ہٹائی ہوئی ہو تو ہوا اور اس نقطہ سے غبارہ کی کسی افقی تراز (لا) کا فاصلہ لا ہو اور ف غبارہ کا ارتفاع ہو تو ہٹائی ہوئی ہوا کے ایک طبقہ کا وزن ہوگا

$$\frac{۴}{ش} \text{ تو } ک (ی + لا)$$

اور لایہ ب ا ج = ط' ا ب = ۲ ا ج' (ج = ۲ ب
 نیز فرض کرو کہ نقطہ سے کے محدود (لانا) ہیں۔ ا ب نقطہ کے محدود ہیں اور
 نقطہ سے پر کے عماد کی مساوات ہے

$$\text{ع} - \text{ما} = \frac{\text{ماجم ط} - \text{لا}}{\text{لاجم ط} - \text{ما}} (\text{فنا} - \text{لا})$$

اور اگر یہ نقطہ ف میں سے گزرے جس کے محدود ا ب ہیں تو

$$(\text{ب} - \text{ما}) (\text{لاجم ط} - \text{ما}) = (\text{ا} - \text{لا}) (\text{ماجم ط} - \text{لا})$$

$$\text{یا لا} - (\text{ا} + \text{ب جم ط}) \text{لا} = \text{ما} - (\text{ا جم ط} + \text{ب}) \text{ما} \dots \dots (\text{بہ})$$

مساواتیں (ع) اور (ب) زائد کے تمام نقطوں کا تعین کرتی ہیں جن پر کے عماس
 تیراؤ کے خطوط ہو سکتے ہیں۔

نیز مساوات (ج) ا ب، ا ج کے متوازی مزدوج قطروں کے حوالہ سے
 ایک قائم زائد کی مساوات ہے۔ اس لئے ان دونوں زائدوں کے نقاط تقاطع سے کے
 محل ہیں۔

مساوات

$$\text{لا} - (\text{ا} + \text{ب جم ط}) \text{لا} + (\text{ا جم ط} + \text{ب}) \text{ا ج} - \text{لا} - \text{ج} = ۰$$

سے لا معلوم ہو سکتا ہے۔ اس مساوات میں صرف ایک اہل منفی ہے اور ایک یا تین

مثبت اعلیٰ ہیں۔ اس لئے توازن کے محل تین ہو سکتے ہیں یا صرف ایک۔

اگر منشور اور الماع کی کثافتیں ρ اور ρ' ہوں تو چونکہ رقبہ Δ ا ق

$$= \frac{1}{4} \Delta \times \text{ا ق} \times \text{ب ط} = ۲ \Delta \times \text{ا ب} \times \text{ج} \times \text{ب ط}$$

$$\text{اسکے } ۲ \Delta \times \text{ب ط} = ۲ \times \text{ب ط} \times \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج} \times \text{ب ط}$$

$$\text{یا } \Delta \times \text{ب ط} = \Delta \times \text{ا} \times \text{ب} \times \text{ج} \times \text{ب ط}$$

جس سے ج معین ہو جاتا ہے۔

فرض کرو کہ منشور متساوی الساقین ہے تو $\text{ا} = \text{ب}$ رکھنے سے لا کو متعین کرنے کی

مستطیل ڈی کے معیار اور مثلث جگ ب د کے دو چند معیار کے فرق کے مساوی ہے

$$۲ \times \frac{۱}{۲} \times \text{ج ب ط} - \text{ڈا مس ط} \times \frac{\text{ا ق ط ط} + \text{ا ج ط}}{۳}$$

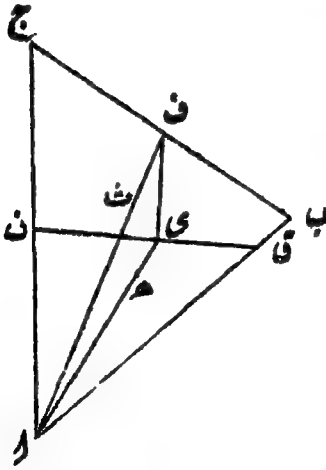
یا جب ط (۱ - مس ا ط)

کے تناسب ہوگا اور یہ اسی صورت میں معدوم ہو سکتا ہے جبکہ ط = ۱۰ یا ۱۱

اس لئے توازن کا کوئی دوسرا محل نہیں ہو سکتا۔

مثال ۳۔ ایک مثلثی منشور اس طرح تیرا ہے کہ اس کے کنارے انفریقی ہیں۔ اس کے توازن کے محل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ شکل ذیل منشور کی وہ تماسش ہے جو اس کے مرکز ثقل میں سے گزرنے والے انقباضی مستوی سے پیدا ہوتی ہے۔



ن ق تیراؤ کا خط اور ہٹائے ہوئے

مانع کا مرکز ثقل ہے۔ توازن کی صورت میں

رقبہ ا ن ق : رقبہ ا ب ج :: منشور

کی کثافت : مانع کی کثافت

اور اس لئے ن ق کے تمام محلوں

کے لئے ا ن ق مستقل ہے۔ اس لئے

ن ق ہمیشہ اپنے وسطی نقطہ پر ایک ایسے

نائد کو مس کرتا ہے جس کے متقارب ا ب

اور ا ج ہیں۔

نیز ہٹ، ن ق پر عمود وار ہونا چاہیے اور چونکہ

$$ا ه : ه ی = ا ث : ث ق$$

اس لئے ن ق پر عمود وار ہوگا۔ یعنی ن ق سی دائرہ کے نقطہ ی پر کا

عماد ہے۔ اس لئے اب یہ مسئلہ ن سے منحنی پر عماد کھینچنے کے مسئلہ میں تقوئل ہو جاتا ہے

فرض کرو کہ محاور ا ب، ا ج کے حوالہ سے منحنی کی مساوات ہے

$$۱۱ ج = ج ا$$

تو ٹھوس کا کچھ حجم بانی میں اور ڈوب جائے گا جو اس کے وزن اور بانی اور ہوا کی کثافتوں پر منحصر ہوگا۔ اس کی مزید تشریح یوں ہو سکتی ہے کہ ہوا کا دباؤ پانی کی سطح پر بمقابلہ کسی اور کے نقطہ پر کے دباؤ کے زیادہ ہے اور ہوا کا یہ سطحی دباؤ پانی کے ذریعہ تیرنے والے جسم کے غرق شدہ حصہ پر منتقل ہو جاتا ہے جس کا یہ نتیجہ ہوتا ہے کہ اس پر ہوا کا اوپر وار دباؤ اس کے نیچے وار دباؤ سے بڑا ہوتا ہے۔

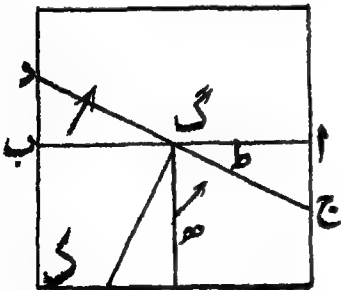
۴۹۔ ہم چند خاص صورتیں لیکر شرائط بالا کے اطلاقی کی توضیح کریں گے۔
مثال (۱) ٹھوس مکانی نمنا کا ایک حصہ جس کا ارتفاع دیا گیا ہے، ایک متجانسائع میں سطح تیر رہا ہے کہ مہر انتصابی اور اس نیچے کی طرف سے اس کے توازن کا محل معلوم کرو۔
تکوینی مکانی کے وتر خاص کو ۴، ارتفاع کو ۱، اور اس کی گہرائی کو ۲ سے تعبیر کیا جائے تو پورے ٹھوس اور غرق شدہ حصہ کے حجم علی الترتیب ۲۲ و ۲۲ و ۲۲ اور ۲۲ لا ہونگے۔ اور اگر ٹھوس اور مانع کی کثافتیں ۱۲، ۲۲ ہوں تو توازن کی ایک شرط یہ

$$۲۲ \times ۱۲ = ۲۲ \times ۲۲ \quad \text{لا}$$

$$۱۲ = ۲۲ \quad \text{لا}$$

جس سے غرق شدہ حصہ کا تعین ہو جاتا ہے۔ دوسری شرط صریحاً پوری ہوتی ہے۔
مثال (۲) ایک مربع پترا ایک مانع میں جس کی کثافت اسکی کثافت کا دو چند ہے انتصاباً تیر رہا ہے۔ اس کے توازن کے محل معلوم کرو۔

شرائط توازن صریحاً پوری ہوتی ہیں اگر پترے کا نصف حصہ مانع میں اس طرح غرق ہو کہ وتر انتصابی رہے یا دو اضلاع انتصابی ہوں۔



اب یہ معلوم کرنے کے لئے کہ کوئی اور محل بھی توازن کا محل ہو سکتا ہے یا نہیں۔ فرض کرو کہ پترا اس طرح تھا گیا ہے کہ نقطہ تقیم دگ ج مانع کی سطح میں ہے اس صورت میں پہلی شرط پوری ہوتی ہے۔ لیکن اگر ج گ ۱ = ط اور مربع کا وزن ۲ = ۱۲ تو نقطہ گ کے گویائی دباؤ کا معیار ہو

باب چہارم

تیرنے والے اجسام کا توازن

(۵۱)

۴۸ — تیرنے والے جسم کے توازن کی شرطیں معلوم کرنا۔

ہم یہ فرض کریں گے کہ سیال صرت جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے اور جسم بھی صرف اسی قوت کے زیر اثر سیال میں آزادانہ تیر رہا ہے۔ اس طرح جسم پر عمل کرنے والی قوتیں صرف اس کا وزن اور گرد کے سیال کا دباؤ ہو گا۔ اس لئے توازن کے قیام کے لئے حاصل سیالی دباؤ جسم کے وزن کے مساوی ہو گا اور انتصبانی سمت میں عمل کرے گا۔

اب ہمیں یہ معلوم ہے کہ جزا یا ٹکڑا غرق شدہ ٹھوس کی سطح پر کا حاصل سیالی دباؤ ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہوتا ہے اور اس کی کمیت کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصبانی خط میں عمل کرتا ہے۔

اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ جسم کا وزن ہٹائے ہوئے سیال کے وزن کے مساوی ہونا چاہیئے اور یہ کہ جسم اور ہٹائے ہوئے سیال کی کمیتوں کے مرکز ایک ہی انتصبانی خط میں واقع ہونے چاہئیں۔

یہ شرطیں توازن کے لئے ضروری اور کافی ہیں خواہ سیال جس میں جسم تیر رہا ہے کسی نوعیت کا ہو۔ اگر سیال غیر متجانس ہے تو ہٹائے ہوئے سیال کو اس طرح خیال کرنا ہو گا کہ وہ بھی جسم کو گھیرنے والے سیال کے قانون کثافت کی پابندی کرتا ہے۔ بالفاظ دیگر اس میں ایسے طبقات فرض کرنے ہونگے جو گرد کے افقی طبقات کے ساتھ مسلسل ہوں نیز اسی قسم کے اور اسی کثافت کے ہوں۔

مثلاً اگر ایک ٹھوس جسم جزا غرق شدہ پانی میں تیر رہا ہو تو اس کا وزن ہٹائے ہوئے پانی کے وزن اور ہٹائی ہوئی ہوائی وزن کے مجموعہ کے مساوی ہو گا۔ اور اگر ہوا کو خارج کر دیا جائے یا اس کے دباؤ کو کثافت یا ٹپش کی تنہیت سے کم کر دیا جائے

افنی ثابت محور کے گرد گھومتا ہے جو گ گہرائی پر ہے اور ستوی پر عمود وار ہے۔ اگر گ گہرائی پر سیال کی کثافت مہ ی کے مساوی ہو اور اگر محور اور ستوی کے نقطہ تقاطع میں سے گزرنے والے دو علی اقوام محاور میں سے ہر ایک کے لحاظ سے ستوی رقبہ متشاکل ہو تو ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کا طریق نقصا میں ایک قطع ناقص ہے جس کے مرکز کی گہرائی ہے

$$g = (g - k_1 k_2)$$

$$g = \frac{(g + k_1 k_2)(g + k_1 k_2)}{(g + k_1 k_2)}$$

جہاں متشاکل محوروں کے لحاظ سے رقبہ کے گردش کے نصف قطر $k_1 k_2$ ہیں اور گزہ ہوائی کا دباؤ ہے

$$p = g - (g - k_1 k_2)$$

۵۔ ثابت کرو کہ کسی غرق آب ستوی رقبہ کا دباؤ ایک قوت میں جو رقبہ کے مرکز ہندسی پر عمل کرتی ہے اور ایک جہت میں جو رقبہ کے ستوی میں ایک محور کے گرد ہے تحلیل ہو سکتا ہے۔ نیز ثابت کرو کہ اس جہت کا محور اس ماس پر عمود وار ہے جو مرکز ہندسی پر کے معیاری ناقص کے افقی قطر کے سرے پر بھیجا گیا ہے۔



۵۰۔ ایک استوار کروڑی خول کا نصف قطر ۱ ہے۔ اس میں گیس کی کمیت ک ہے جس میں دباؤ کثافت کا ل گنا ہے گیس ایک ثابت بیرونی نقطہ دے (جس کا فاصلہ مرکز سے ف ہے) ایسی قوت سے دفع ہوتی ہے جو فی اکائی کمیت $\frac{1}{f}$ کے مساوی ہے۔

ثابت کر دو کہ خول پر گیس کا حاصل دباؤ ہے

$$\frac{L}{F} \times \frac{F^2 - 2}{F^2 + 2}$$

۵۱۔ پانی سے بھرا ہوا ایک غرت ناقص بنا (محاور ۱، ۲، ۳، ۴) کے آٹھویں حصہ کی شکل کا ہے جو تین صدی مستویوں سے متحدہ ہے۔ محور انحصالی ہے اور مرکز ہوائی کا دباؤ نظر انداز ہو سکتا ہے۔

(۵۰)

ثابت کر دو کہ سطح پر کا حاصل سیالی دباؤ ایک ایسی قوت ہے جس کی شدت ہے

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2}$$

۵۲۔ ایک کھوکھلا ناقص بنا پانی سے بھرا گیا ہے اور اس طرح رکھا گیا کہ محور ۱ افقی کے ساتھ زاویہ ۷۵° کے اور محور ۲ افقی ہے۔ ثابت کر دو کہ محور ۱ میں سے گزرنے والے انحصالی مستوی کے ہر طرف کی سطح پر کا سیالی دباؤ ایک رینج (Wrench) کے مساوی ہے جس کی گمانی ہے

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2}$$

۵۳۔ ایک مثلث ایک دائرے میں غرق ہے جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس مثلث کے اس دائرے کی سطح کے نیچے ۱، ۲، ۳، ۴ جہ فاصلوں پر واقع ہیں۔ ثابت کر دو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \times \frac{1}{2}$$

۵۴۔ ایک مستوی رقبہ ایک وزن دار غیر متجانس سیال میں کھینٹا غرق ہے اور ایک ایسے

منطبق ہو جائے تو ثابت کر دو کہ

ف : ق : ر :: ۳ : ۲ : ۱ - (م + ن) : ۳ - م - (ن + ل) : ۳ - ن - (ل + م) : ۴
 ۴ — ایک مکعب صندوق کے ضلع کا طول لوہے اور اس کے وزن دار ڈھکن کا وزن
 وپے جو ایک کنارے کے گرد حرکت کر سکتا ہے۔ صندوق کو پانی سے بھر دیا گیا ہے اور اس
 کنارہ کے ایک سرے میں سے گزرنے والے قطر کے ذریعہ اس کو انتصابی طور پر رکھا گیا ہے
 اب اگر اس کو یکساں زاوی رتار سے گھمایا جائے تو ثابت کر دو کہ وکو

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \right) \omega$$

سے کم نہ ہونا چاہیے تاکہ پانی گرنے جائے جہاں و صندوق کے اندر دنی پانی کا وزن ہے —
 ۴۸ — ایک ناقص نما کو مرکز میں سے گزرنے والے کسی مستوی سے تراش کر اس کی منحنی سطح
 اور مستوی تراش سے ایک بند استوار برتن تیار کیا گیا ہے۔ برتن کو پانی سے عین بھر کر ایک افقی
 میز پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ مستوی قاعدہ میز پر رکھا رہے۔ ثابت کر دو کہ منحنی سطح پر کا حامل دباؤ
 ایک انتصابی قوت کے مساوی ہے جو پانی کے نصف وزن کے مساوی ہے اور جس کا
 خط عمل مستوی قاعدہ کو مرکز سے ۳/۴ مارے۔ حاصلہ پر قطع کرتا ہے جہاں ر قاعدہ کا
 مزدوج نصف وتر اور ع مرکز سے افقی عماسی مستوی پر عمود ہے۔

۴۹ — ایک چھوٹا ٹھوس جسم ایک سیال میں ساکن رکھا گیا ہے جس میں کسی نقطہ پر کا دباؤ
 قائم محدود لا، مای کا ایک دیا ہوا تقا عمل ہے۔ ثابت کر دو کہ اس جفت کے اجزائے
 ترکیبی جو جسم کو اس کے مرکز ثقل کے گرد گھمانے کا میلان رکھتا ہے

$$(ج - ب) \frac{F_2}{F_1} - \left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{F_2}{F_1} \right) \left(\frac{F_2}{F_1} - \frac{F_2}{F_1} \right) \frac{F_2}{F_1}$$

$$+ \frac{F_2}{F_1}$$

اور اسی طرح کے دو اور جملے ہیں جہاں ا، ب، ج، د، ع، ف مرکز ثقل میں سے
 گزرنے والے محاورے کے لحاظ سے جسم کے حجم کے جمودی معیاروں اور جمود کے محال مضربوں
 کو تعبیر کرتے ہیں۔

کہ اس کا محور انتصابی رہے اور پھر بائی کی کوئی مقدار اس میں ڈال دیں اور اس کے محور میں سے گزرنے والے انتصابی مستوی سے اس کو دو حصوں میں تقسیم کریں تو کل فطرت پر کا حاصل انتصابی دباؤ اس حصہ پر کے حاصل افقی دباؤ کے ساتھ مستقل نسبت رکھتا ہے۔ سطح کی شکل معلوم کر دو۔

۴۳۔ ایک منحنی انتصابی محور کے گرد متناقل رہے اگر اس کو مانع میں اس طور پر غرق کیا جائے کہ سب سے اونچے نقطہ کی گہرائی سب سے نیچے نقطہ کی گہرائی کی نصف ہو تو اس کے دباؤ کا مرکز محور کی تہذیب کرتا ہے۔ اس کی مساوات دریافت کر دو۔

۴۴۔ ایک مستطیل رقبہ پچھرا مانع میں اس طرح غرق ہے کہ اس کی سطح انتصابی ہے اور اس کا ایک ضلع مانع کی سطح میں ہے جہاں دباؤ صفر ہے۔ اگر کثافت دباؤ کا محلی تفاعل ہو تو ثابت کر دو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

جہاں انتصابی ضلع کا طول $\frac{1}{m} \times \frac{(m-1)T + (1-\frac{1}{m})T}{T - (1+m)T}$ ہے اور رقبہ کی چوٹی پر کثافت T اور اس کے بائیں پر کثافت T ہے۔ اور

$$m = \text{دک} \left(\frac{T}{T} \right)$$

۴۵۔ ایک مثلثی پیرے کے راس α ، β ، γ ایک متجانس مانع میں بالترتیب g ، g ، g گہرائیوں تک غرق ہیں۔ اگر α ، β ، γ سے β ، γ ، α پر عمود علی الترتیب α ، β ، γ ہوں تو ثابت کر دو کہ دباؤ کے مرکز کے خطی (Trilinear) محدد ہونے

$$\frac{g}{\alpha} \left(1 + \frac{g}{\beta} + \frac{g}{\gamma} \right) = \frac{g}{\beta} \left(1 + \frac{g}{\alpha} + \frac{g}{\gamma} \right) = \frac{g}{\gamma} \left(1 + \frac{g}{\alpha} + \frac{g}{\beta} \right)$$

۴۶۔ ایک مثلثی پیرا ایک متجانس مانع میں پوری طرح غرق ہے۔ اس کے راسوں کی گہرائیاں α ، β ، γ ہوں اگر مثلث کے دباؤ کا مرکز راسوں پر اضاعت L ، M ، N کے اوسط مرکز پر

۱۱/۱ + ۲/۱ = ۳/۱ ہے۔ صدری مستویوں سے اسے چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان میں سے ایک حصہ میں گ گہرائی تک باقی ڈالا گیا ہے۔ اگر مخفی حصہ پر کے حاصل دباؤ کو انتصابی اور افقی سمت میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ افقی جزو تحلیل کا خط عمل نقطہ (۱۱/۱، ۱۱/۱) ب، ج (گ) میں سے گزرے گا۔

۳۷۔ نصف کرہ کی شکل کا ایک پیالہ پانی سے بھرا دیا گیا ہے۔ اگر اسکو ایک ایسے مستوی سے تراشا جائے جو اس کے مرکز میں سے گزرتا ہے اور افقی کے ساتھ دیا ہوا زاویہ بناتا ہے تو پیالے کے اوپر کے حصہ پر حاصل دباؤ کی سمت اور مقدار دریافت کرو۔

۳۸۔ ایک مکمل مخروطی خول میں جس کا وزن نظر انداز کیا جاسکتا ہے پانی بھرا دیا گیا ہے اور اس کے کنارے کے ایک نقطہ سے اس کو لٹکا کر توازن کا محل تبدیل کر دیا گیا ہے۔ اگر اس کا زاویہ راس ج، ا ۲ ہو تو ثابت کرو کہ باقی کی سطح نقطہ تعلیق میں سے گزرنے والے تکیوینی خط کو نسبت ۲:۱ میں تقسیم کریں گی۔

۳۹۔ ایک متعظم کثیر الاضلاع جو پوری طرح ملے میں غرق ہے اپنے مرکز ثقل کے گرد حرکت کر سکتا ہو۔ ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کا طریق ایک کرہ ہے۔

۴۰۔ ایک نصف کرہ کی طرف پانی سے بھرا دیا گیا ہے اور اس کے وسطی نصف قطر میں سے دو انتصابی مستوی کھینچے گئے ہیں۔ جو سطح کو نصف پیمائش میں جڑاٹے ہیں۔ اگر مستویوں کا درمیانی زاویہ ۲۰ ہو تو ثابت کرو کہ اس پیمائش پر حاصل دباؤ انتصابی سمت کے ساتھ زاویہ

مس (جیب ۷۰)

بناتا ہے۔

۴۱۔ نیم قطب کا ایک ثابت کرہ ہے اس کو ث کثافت والے سیال کی کیت ۲۲/۱ احاطہ کئے ہوئے ہے یہ سیال ایک ایسے نقطہ کی طرف قوت مددنی اکائی کیت سے جذب ہوتا ہے جس کا فاصلہ اس کے مرکز سے ج (ب) ہے۔ بیرونی دباؤ کو صفر فرض کر کے ثابت کرو کہ پیر کا حاصل دباؤ دریافت کرو۔

۴۲۔ گروشی سطح کی شکل کا ایک ظرف حسب ذیل خاصیت رکھتا ہے اگر اس کو اس طرح رکھیں

ساتھ نہ ہو تو ثابت کر دو کہ

۳ جب ۲ ط مس فہ = ۵ جب ط - ۳ جب ط - ۲ جب ط

۳۱۔ سیال کی کچھ کیفیت ایک محور کے گرد اضافی توازن میں گھوم رہی ہے۔ یہ سیال قانون قدرت کی بموجب کشش کرتا ہے۔ اس میں ایک چھوٹا ذرہ داخل کر دیا گیا ہے اور اس کو وہی رفتار دی گئی ہے جو کہ اس جگہ کے سیال کے ذرہ کی ہے۔ کیا اپنی حرکت میں یہ محور کی طرف آئے گا یا اس سے پرے ہٹے گا۔

۳۲۔ سیال کی ایک غیر محدود کمیت میں دو خول داخل کئے گئے ہیں۔ سیال کی کثافت ٹ ہے اور اس کا ہر حصہ ہر دوسرے حصہ کو قانون قدرت کے بموجب جذب کرتا ہے خولوں کے اندرونی دہیر دتی نصف قطر علی الترتیب $\frac{1}{2}b$ اور $\frac{1}{2}a$ ہیں اور ان کی کثافتیں ρ_1 و ρ_2 ہیں۔ خول بھی ایک دوسرے کو اور سیال کو قانون قدرت کے بموجب جذب کرتے ہیں۔ ہر خول پر کی حامل قوت معلوم کر دو اور ثابت کر دو کہ بعض صورتوں میں یہ قوت داخلہ ہوگی۔

۳۳۔ ایک دیا ہوا رقبہ انتہائی طور پر ایک وزن دار مائع میں غرق ہے اس رقبہ کو قاعدہ مان کر ایک مخروط بنایا گیا ہے جو کلیتہاً مائع میں غرق ہے اس کا طریق معلوم کرو جبکہ سطحی سطح پر کا حاصل دباؤ مستقل ہو اور ثابت کر دو کہ یہ دباؤ غیر متغیر رہیگا اگر مخروط کو اس افقی خط کے گڑھایا جائے جو قاعدہ کے مرکز ثقل میں سے گزرتا ہے اور قاعدہ کے مستوی پر عمود دار ہے۔

۳۴۔ ایک مخروطی برتن کو جس کا محور انتہائی اور اس نیچے وار ہے محور میں سے گزرنے والے ایک مستوی سے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ان حصوں کو اس پر کے ایک قبضہ اور ایک ڈوری کے ذریعہ جو برتن کے کنارہ کا قطر ہے اور فاصلہ مستوی پر عمود وار ہے جدا ہونے سے روکا گیا ہے۔ اگر برتن کو پانی سے بھر دیا جائے تو رسی کے تناؤ کا پانی کے وزن کے ساتھ مقابلہ کرو۔ (۲۸)

۳۵۔ ایک کھوکھلے مخروط کو جسکی چوٹی کھلی ہے پانی سے بھر دیا گیا ہے اس کے محور میں سے گزرنے والے دو مستویوں سے (جن کا درمیانی زاویہ دیا گیا ہے) مخروط کے ایک طرف جو سطح کا حصہ کٹا ہے اس پر کا حاصل دباؤ اور اس کا خط عمل معلوم کرو۔

اگر زاویہ اس قائمہ ہو تو ثابت کر دو کہ یہ خط مخروط کی چوٹی کے مرکز میں سے گزرے گا۔
۳۶۔ ایک برتن ناقصی مکانی شکل کا ہے اس کا محور انتہائی ہے اور اس کی سادہ

۲۵۔ ایک مخروط مانع سے بھر دیا گیا ہے۔ اس کا ڈھکن وزن W اور ٹھیک بیٹھنے والا ہے اور ایک قبضہ لگ کر حرکت کر سکتا ہے۔ اس مخروط کو قبضہ میں سے گزرنے والے ٹکڑی خط کے گرد (جو انتصابی ہے) یکساں رفتار سے گھمایا گیا ہے۔ بڑی سے بڑی زاوی رفتار معلوم کرو کہ مانع نکل نہ پڑے۔

۲۶۔ کروی خول کا ایک حصہ ایک مستوی سے تراش لیا گیا ہے اور بقیہ حصہ کو ایک افقی مستوی پر اس طرح رکھا گیا ہے کہ دائری تراش مستوی کو مس کرے۔ پھر سکو بلند ترین نقطہ پر کے ایک چھوٹے طور رخ کے ذریعہ پانی سے بھر دیا گیا ہے۔ کروی خول کا بڑے سے بڑا حصہ دریافت کرو جو کاٹ لیا جاسکے اس طرح کہ پانی باہر نکل پڑنے نہ پائے خواہ خول کتنا ہی ہلکا ہو۔ ایسی صورت میں ثابت کرو کہ خول پر کا پورا دباؤ مانع کے وزن کے ساتھ $2:1$ کی نسبت رکھتا ہے۔

۲۷۔ اگر ایک غرق شدہ مستوی رقبہ اپنے مستوی میں کے ایک خط مستقیم کے گرد گھومے تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز اس مستوی میں ایک خط مستقیم مرتسم کرتا ہے۔

۲۸۔ ایک کعب کا کنارہ 2.5 ہے اس کے رخ افقی اور انتصابی ہیں۔ اس کے گرد ایک وزن دار مانع ہے جس کا حجم 100 ہے۔ $\{100 - 2.5\}$ سبب مانع پر ایک ایسی قوت عمل کرتی ہے جو کعب کے مرکز کی طرف مائل ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس مرکز سے فاصلہ۔ فاصلہ و پر قوت کی مقدار ج ہے۔ آزاد سطح کی شکل اور کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔ اگر ایک انتصابی رخ اپنے مستوی کے ایک افقی خط مستقیم کے گرد حرکت کر سکے تو ثابت کرو کہ یہ رخ ساکن ہوگا بشرطیکہ یہ خط اس رخ کے زیرین کنارے سے $1/2$ و فاصلہ پر واقع ہو۔

۲۹۔ ایک ٹھوس مکانی نما ماسک میں سے گزرنے والے مستوی سے تراشا گیا ہے جو اس کے محور پر علی التوا قائم ہے۔ یہ مکانی نما پوری طرح مانع میں غرق ہے اس طرح کہ اس کا واس دی ہوگی گہرائی پر ہے اور اس کا محور انتصابی سمت کے ساتھ دیا ہوا زاویہ بناتا ہے۔ اس کی منحنی سطح پر کے حاصل دباؤ کی سمت اور اس کی مقدار معلوم کرو۔

۳۰۔ ایک مکانی رقبہ و تر خاص سے محدود ہے۔ اس کو وتر خاص کے گرد زاویہ ط میں گھما کر ایک ٹھوس بنایا گیا ہے اور اس ٹھوس کو پانی میں اس طرح تھما گیا ہے کہ یہ بین رخ غرق رہے اور اس کا پچلا مستوی رخ افقی رہے۔ اگر منحنی سطح پر کے حاصل دباؤ کا میلان افق کے

۱۸۔ محوروں اور منحنی ۲ آ + ۱ آ = آ کے درمیانی رقبہ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔ محاور
علیٰ القیام ہیں اور ایک محور سیال کی سطحیں واقع ہے۔

۱۹۔ مانع کی کچھ مقدار دو متوازی مستویوں کے درمیان ہو۔ یہ مانع ایک مرکزی قوت کے
زیر اثر ہے جو اسے نہتی ہے جیسے فاعلہ اگر مستویوں کے ان حصوں کے رقبہ جہاں سیال
میں گرا ہے وہاں ہوں تو ثابت کر کہ ان حصوں پر کے دباؤں میں نسبت ۱ : ۱ بدست
۲۰۔ ایک سطحیں کہہ ایک انحنی مستوی پر گھسا ہوا ہے اور اس کے نیچے میں دوبا ہوا ہے۔
انحنی سطح میں سے گزرنے والے دو علیٰ القیام مستویوں سے اس کے دو تقسیم کیا گیا ہے اگر
کہہ کی کثافت ۱ اور سیال کی ۲ ہو تو ثابت کر کہ یہ حصے ایک دوسرے سے جدا نہیں ہوں گے

بیشک یہ نہ کہ ۱ : ۲

۲۱۔ زائد کا ایک متقابل سیال کی سطح میں ہے۔ اس رقبہ کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی
معلوم کرو جو دو متقابل سطحیں اور زائد سطح میں کے دو افقی خطوط مستقیم سے
محدود ہے۔

۲۲۔ ایک مخروط پانی میں اس طرح ڈوبا ہوا ہے کہ اس کے قاعدہ کا مرکز پانی کی سطح کے نیچے
اس کے اوٹھنے کے پتہ گہرائی پر واقع ہے۔ اس قاعدہ اور ارتفاع کا ایک سطحی منہ بھی
اس طرح غرق ہے کہ اس کے قاعدہ کے مرکز کے نیچے سطح کے نیچے وہی ہے جو مخروط کے
قاعدہ کے مرکز کی ہے۔ نیز انحنی سطح کے مرکز سے اس کے محور کا میلان بھی وہی ہے جو مخروط کے
محور کا ہے۔ یہ میلان کیا ہونا چاہیے کہ ان دونوں مجسموں کی محبب سطحوں پر کے دباؤ مساوی ہوں۔
۲۳۔ ایک بند مسعودہ مانع سے تھریا بھا ہوا ہے اور اپنے ایک ٹکڑی خط کے گرد چلتا ہے
ہے یکساں رفتار سے گھوم رہا ہے۔ اس کی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کرو۔
اس کے اوپر کے رقبہ پر جو دباؤ ہے اس کا نقطہ ثقل بھی معلوم کرو۔

۲۴۔ ثابت کر کہ جو رقبہ منحنی (۱) ۱ : ۲ = ۱ : ۲ کے متقابل اور اس کی توس کے میلان
گہرا ہوا ہے اس کے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہے

$$\frac{4}{3} \times \frac{16 + 113}{13 + 113}$$

جہاں متقابل سیال کی سطح میں پہلے منحنی کا مستوی انحنی ہے۔

۴۶

۱۳۔ ایک نصف دائری انتصابی پتھر پوری طرح پانی میں ڈوبا ہوا ہے اس کے محدود کرنے والے قطر کا سراہ پانی کی سطح میں ہے اور پانی کی سطح کے ساتھ اس قطر کا میلان ۷۰ ہے۔ اگر سے دباؤ کا مرکز ہو اور قطر اور اسے کا درمیانی زاویہ ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس ط} = \frac{14 + 113}{115 + 14}$$

۱۴۔ اگر ایک مثلث کے راسوں کی گہرائیاں مائع کی سطح کے نیچے 'ا' ب' ج ہوں تو ثابت کرو کہ مرکز ثقل کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی ہوگی

$$(ب - ج) + (ج - ا) + (ا - ب)$$

$$12 (ا + ب + ج)$$

۱۵۔ ایک مستوی رقبہ جو ایک سیال میں ڈوبا ہوا ہے اپنے متوازی اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا مرکز ثقل ہمیشہ ایک ہی انتصابی خط میں رہتا ہے۔ ثابت کرو کہ (۱) دباؤ کے مرکز کا طریق قطع زائد ہے جس کا ایک متقارب دیا ہوا انتصابی خط ہے اور (۲) اگر مختلف محلوں میں اس کے مرکز ثقل کی گہرائیاں ۱، ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱ + ۱ اور ان کے متناظر دباؤ کے مرکز کی گہرائیاں ۱، ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱ + ۱ ہوں تو

$$\begin{vmatrix} ک & ھ & ھ & (ک - ھ) \\ ک & ھ & ھ & (ک - ھ) \\ ک & ھ & ھ & (ک - ھ) \end{vmatrix} = 0$$

۱۶۔ مکانی کے ایک قطعہ کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو وتر خاص سے محدود ہے اور وتر خاص کے ایک سرے پر کا ماس مائع کی سطح میں ہے۔

اگر مائع کی سطح اوپر چڑھے اور مکانی ساکن رہے تو ثابت کرو کہ دباؤ کا مرکز ایک خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔

۱۷۔ ایک مخروط پانی میں پوری طرح غرق ہے۔ اس کے قاعدہ کے مرکز کی گہرائی دی گئی ہے۔ اگر اس کی محب سطح پر کے حاصل دباؤ ۱، ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱ + ۱ ہوں جبکہ ان کے ساتھ اسے محور کے میلان کے حیرت بالہ ترتیب ۱، ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱، ۱ + ۱ + ۱ + ۱ میں تو ثابت کرو کہ

$$ڈ(س - س) + ڈ(س - س) + ڈ(س - س) = 0$$

اگر اس کو اس داس کے گرد اس کے اپنے مستوی میں گھمایا جائے اور پتھر ہمیشہ پور سی طرح بائیں میں ڈوبا رہے تو اس کے دباؤ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۶۔ ایک ناقص پتھر کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو بانی میں عین ڈوبا ہوا ہے۔ اگر اس کو اپنے انتصابی مستوی میں اس طرح گھمایا جائے کہ یہ ہمیشہ پانی میں غرق رہے تو اس کے محوروں کے لحاظ سے دباؤ کے مرکز کا طریق معلوم کرو۔

۷۔ ایک مکعب صندوق پانی سے بھر دیا گیا ہے اس کا ڈھکن وزن دار اور ٹھیکیک بیٹھنے والا ہے اور اسکو چکے قبضوں کے ذریعہ ایک کنارہ پر ثابت کر دیا گیا ہے۔ باسی باسی سے اسکو قاعدہ کے ہر کنارے کے گرد اتنے زادیہ میں گھمایا گیا ہے کہ پانی عین خارج ہونے لگے۔ ان دائروں کے تماسوں کا مقابلہ کرو۔

۸۔ ہم محور دائروں کے ایک نظام کو پانی میں اس طرح ڈوبا گیا ہے کہ مرکزوں والا خط ایک دی ہوئی گہرائی پر رہے۔ ثابت کرو کہ پورے طور پر ڈوبے ہوئے دائری رقبوں کے دباؤ کے مرکز ایک مکانی پرواقع ہوتے ہیں۔

۹۔ ایک نیم قطع ناقص (محاورہ ۲ اور ۱) کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جو ایسے قطر سے محدود ہے جس کا میلان محور اعظم کے ساتھ $\frac{1}{4}$ ہے ناقص کی سطح انتصابی ہے اور قطریاں کی سطح میں واقع ہے۔

۱۰۔ ایک نیم قطع ناقص اپنے محور اصغر سے محدود ہے اور ایسے بائیں میں عین ڈوبا ہوا ہے جس کی کثافت ایسے ہوتی ہے جیسے گہرائی۔ اگر محور اصغر بائیں کی سطح میں واقع ہو تو خروج المرکز دریافت کرو تاکہ اسکو دباؤ کا مرکز ہو سکے۔

۱۱۔ ایک مربع پتھر ۱ ب ج د پانی میں ڈوبا ہوا ہے اس کا ضلع ۱ ب پانی کی سطح پر واقع ہے۔ نقطہ ب سے ج د کے نقطہ سے تک خط مستقیم ب سے ایسا کھینچو کہ دونوں حصوں پر اس کے دباؤ مساوی ہوں۔

ایسی صورت میں ثابت کرو کہ

دباؤ کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ : مربع کا ضلع :: $5.0 : 4.8$

۱۲۔ ایک نصف دائرہ میں سے جس کا قطر بائیں کی سطح میں ہے ایک دائرہ کاٹ لیا گیا ہے اس دائرہ کا قطر نصف دائرہ کا انتصابی نصف قطر ہے بقیہ حصے کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

کر سکتے ہیں۔ اب یہ داخل شدہ سیال ان قوتوں اور گرد کے سیال کے دباؤں کے زیر عمل ساکن ہوگا۔ اور اس لئے حاصل دباؤ ان دی ہوئی قوتوں کے حاصل کے مساوی ہوگا مگر سمت متقابل میں عمل کرے گا۔

جسم کی جگہ کو سیال سے بڑھتے وقت قانون کثافت کی پابندی کرنی چاہیے یعنی مساوی کثافت کی سطحیں گرد کے سیال کی کثافت کی سطحوں کے ساتھ مسلسل رہنی چاہئیں۔

امثلہ

۱۔ ایک وزندار موٹی رسی جس کی کثافت پانی کی کثافت کی دو چہدہ ہے ایک سرے سے جو پانی کے باہر ہے اس طرح ٹکائی گئی ہے کہ اس کا چھ حصہ غرق آب رہے۔ غرق شدہ حصہ کے وسط پر رسی کا تناؤ دریافت کرو۔

۲۔ ایک کھوکھلے گڑے کا نصف قطر دہے۔ اسکو پانی سے عین بھردیا گیا ہے اس کی سطح کو ایک ایسے مستوی سے جو مرکز کے نیچے ج گہرائی پر واقع ہے دو حصوں میں تقسیم کیا گیا۔ ان حصوں پر کے حاصل انتصابی دباؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک برتن مخروطی مضلع کی شکل کا ہے جسکا قاعدہ n ضلعوں والا مستوی کثیر الاضلاع ہے اس کو اس طرح رکھا گیا کہ اس کا محور انتصابی اور راس نیچے وار رہے۔ اس کو سیال سے بھردیا گیا۔ برتن کا ہر رخ یا پہلو راس پر کے نصف گڑے کی حرکت کر سکتا ہے لیکن اس کو اپنی جگہ پر قائم رکھنے کے لئے ایک رسی کے ذریعہ اسکو تھاما گیا ہے جو رخ کے قاعدہ کے نقطہ وسطی اور کثیر الاضلاع کے مرکز سے باز دہ گئی ہے۔ ثابت کرو کہ ہر رسی کے تناؤ اور سیال کے کل وزن میں نسبت $1:n$ جب n ہے جہاں n افقی کے ساتھ ہر رخ کا میلان ہے۔

۴۔ ایک دہرے دوہم مرکز نصف دائروں سے گھرا ہوا ہے اور ان کا مشترک قطر آزاد سطح میں واقع ہے ثابت کرو کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{3}{4} (b + b') (b + b')$$

$$(b + b' + b)$$

ہے جہاں b نصف قطر ہیں۔

۵۔ ایک مربع پتھر کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جس کا ایک راس سیال کی سطح میں ہے

ما = کر د فری فرلا

ل = کر د (ما فرلا فرما - ی فری فرلا)

= کر د (ما فرما - ی فری) فرلا

ہر = کر د (ی فری - لا فرلا) فرما

ن = کر د (لا فرلا - ما فرما) فری

۴۶۔ اگر سیال صرف جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہو اور محور سی انتصابی ہو تو د، ی کا تفاعل ہوگا جسکو فرض کر دو کہ فہ (ی) ہے۔

تب لا = کر فہ (ی) فرما فری

مستوی مای بردی ہوئی سطح کا ج ظل ہے یہ جہلہ صریحاً محور لا کے متوازی اس ظل پر کے دباؤ کو تعبیر کرتا ہے۔

اسی طرح ما مستوی لای پر کے ظل پر کے دباؤ کے مساوی ہے۔
اگر سیال بے چسب ہو اور صرف جاذبہ ارض اس پر عمل کرے تو د مفت لا مف ما سیال کے اس حصہ کے وزن کے مساوی ہے جو مفت فہ اور سیال کی سطح پر اس کے ظل کے درمیان واقع ہے۔

۴۷۔ سے یا کر د فرلا فرما دی ہوئی سطح کے اوپر کے سیال کا وزن ہے۔

یہ نتائج دفتات (۴۰) و (۴۱) کے نتائج کے ساتھ متوافق ہیں۔

۴۸۔ اگر ایک ٹھوس جسم جزاً یا کلاً کسی سیال میں غرق کیا جائے اور یہ سیال دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو تو حجم پر کا حاصل سیالی دباؤ آن قوتوں کے حاصل کے مساوی ہوگا جو ہٹائے ہوئے سیال پر عمل آتوں۔

کیونکہ ہم جسم کو سیال سے علیحدہ کر کے اس کی جگہ کو اسی قسم کے سیال سے پُر کیا ہوا تصور

دع جفء مف س دع جفء مف س دع جفء مف س

اس لئے اگر مجرموں کے متوازی حاصل دباؤ والا ہمارے اور حامل جنت

ل، م، ن ہوں تو

۴ = کرد ع جف لا فرس

ما = کر دے جفہ جفہ فرس

۷ = اردع جفء فرس

اور ل = کلا د (اجف می - ی اجف ما) فرس

مر = مردع (ی جفء) - (لا جفء) فرس

ن = کدع ($\frac{\text{جفء}}{\text{جفء}}$ - $\frac{\text{جفء}}{\text{جفء}}$) فرس

سب تکمل کل سطح زیر بحث پر ہیں۔
یہ حاصل ایک تنہا قوت کے معادل ہو گئے اگر

(FF)

لال + ما + مر + ے + ن = .

۳۵۔ جو اُلے کی سطحوں کے متوازی مستوی لینے سے جسم کی سطح تین مختلف طریقوں سے عناصر میں تقسیم ہو سکتی ہے

مثلاً مف لا مف ما = لا ما پر مف س کا ظل = ع $\frac{\text{جفء مف س}}{\text{جفی}}$

اور اس لئے ہے کہ $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$ اور اسی طرح $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r^2} \right) = -\frac{2}{r^3} \frac{dr}{dt}$ اور

پر کا نیچے وار۔ ان دونوں کا فرق صرف ٹھوس کے ہٹاے ہوئے سیال کا وزن ہے۔
 ۴۴۔ ایک ٹھوس جسم پر سے عبیر پر وزن دار باغ میں غرق کیا گیا ہے، اگر اس کی سطح کا کچھ حصہ منحنی سطح اور بقیہ حصہ معلوم مستوی رقبے ہوں اور اگر اس کا حجم Z دیا جائے تو منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کیا جاسکتا ہے۔

کیونکہ مستوی سطحوں کا رقبہ اور ان کا محل معلوم ہے اس لئے ہم ان رقبوں پر کے حاصل افقی دباؤ Δ اور حاصل انتصابی دباؤ Δ حاصل کر سکتے ہیں اور چونکہ جسم کی پوری سطح پر کا دباؤ Δ ح کے مساوی ہے اور اوپر وار انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے اس لئے اس کی سنی سطح پر کا حاصل افقی دباؤ Δ ہو گا اور حاصل انتصابی دباؤ Δ ح۔
 مثال۔ دائری رقبہ کو ایک عماسی خط کے گرد اوپر طہ میں گھمانے سے ایک ٹھوس جسم بنایا گیا ہے۔ اس کو پانی میں اس طرح تھما گیا ہے کہ اس کا پچھلا مستوی رخ افقی اور گہرائی h پر ہے۔

اس صورت میں

$\Delta = \Delta$ ح Δ لا Δ ج Δ ٹ Δ (گ۔ وجب ط) جب ط
 اور $\Delta = \Delta$ ح Δ ٹ Δ (گ۔ گ جم ط + وجب ط جم ط)
 ۴۴۔ کسی سطح پر ایک ایسے سیال کا حاصل دباؤ دریافت کرو جو کسی معلوم قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے۔

فرض کرو کہ سیال کے زیر عمل سطح E ۔ کے نقطہ (لا، ما، ی) پر کا دباؤ Δ ہے جو باب دوم میں حاصل کردہ دباؤ کی طرح معلوم کیا گیا ہے۔

$$\frac{1}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\Delta} \right) + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\Delta} \right) + \frac{1}{\Delta} \left(\frac{\Delta}{\Delta} \right)$$

تو نقطہ (لا، ما، ی) پر کے عماد کے جیب التمام ہونگے

$$\frac{\Delta}{\Delta} \frac{\Delta}{\Delta} ، \frac{\Delta}{\Delta} \frac{\Delta}{\Delta} ، \frac{\Delta}{\Delta} \frac{\Delta}{\Delta}$$

فرض کرو کہ اس نقطہ کو گھیرنے والے رقبہ کا عنصر EF اس سے تعبیر ہوتا ہے تو عماد کے متوازی اس عنصر پر کے دباؤ ہونگے

$$\frac{1}{4} \text{ ج ث } (8 + 2\pi)$$

کے مساوی ہیں جو خط مستقیم

$$\text{لا} - \frac{\pi}{8} = 1 - \frac{\pi}{8} = \frac{2}{\pi} = (Y - \frac{3}{14} \pi) \quad (1)$$

$$\text{یعنی} \quad \frac{2}{\pi} = 1 = \text{لا} \quad Y$$

میں عمل کرتی ہے۔ یہ خط مستقیم مرکز میں سے گزرتا ہے اور ایسا ہونا بھی چاہیے کیونکہ تمام سیالی دباؤ کردہ کی سطح پر عمود وار عمل کرتے ہیں۔ یہ خط مستقیم سطح کو جن نقطہ پر قطع کرتا ہے اس کو دباؤ کا مرکز کہہ سکتے ہیں۔

۴۲۔ وزن دار مائع میں ایک ٹھوس جسم جڑا یا کلاً ڈبو گیا ہے اس کی سطح پر کا حاصل دباؤ معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹھوس کو نکال دیا گیا ہے اور اس کی بجائے اسی قسم کا مائع بھر دیا گیا ہے تو اس پر کا حاصل دباؤ وہی ہوگا جو اصلی ٹھوس پر تھا۔ لیکن اس مائع کی کثیت الگ ہے وزن اور اس کو گھیرنے والے مائع کے دباؤ کے زیر اثر ساکن ہے۔ اس لئے حاصل دباؤ ہٹا ہے ہوئے مائع کے وزن کے برابر ہوگا اور اس کو مرکز نقل میں سے انتصابی سمت میں عمل کریگا۔

اسی طرح کے استدلال سے صریحاً ثبات ہو سکتا ہے کہ کسی ٹھوس جسم پر پھلکا رسیال کا حاصل دباؤ جسم کے ہٹائے ہوئے پھلکا رسیال کے وزن کے برابر ہوتا ہے۔

یہ نتیجہ دفعات (۴۰) اور (۴۱) کی مدد سے اس طرح بھی حاصل کیا جاسکتا ہے۔ سطح کو مس کرتے ہوئے متوازی افقی خطوط مستقیم کھینچو جن سے ایک استوانہ بنے جس کے اندر ٹھوس گم جائے تقاس کا مخفی سطح کو دو حصوں میں تقسیم کرتا ہے جن پر کے حاصل افقی دباؤ اسطوانے کے محور کے متوازی ہیں اور ایک دوسرے کے مساوی ہیں مگر متقابل سمتوں میں عمل کرتے ہیں۔ اس لئے جسم کے افقی دباؤ ایک دوسرے کے اثر کو ذیل کرتے ہیں اور اس لئے حاصل صاف انتصابی سمت میں عمل کرتا ہے۔ اب اس حاصل انتصابی دباؤ کو معلوم کرنے کے لئے سطح کو مس کرتے ہوئے متوازی انتصابی خطوط کھینچو تاکہ سطح دو حصوں میں تقسیم ہو جائے۔ ایک حصہ کا حاصل انتصابی دباؤ اوپر وار عمل کرتا ہے اور دوسرے حصہ

اور علی القوائم مستویوں میں حاصل افقی دباؤ معلوم کرو۔ یہ تین قوتیں بعض صورتوں میں ایک تنہا قوت میں تحویل ہو سکیں گی جس کے لئے شرط سکونیات کے نام طریقوں سے حاصل کیجا سکتی ہے۔

مثال ۱۰ ایک نصف کرہ متجانس مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس کو مرکز میں سے گزرنے والے دو علی القوائم انتصابی ستویوں سے چار حصوں میں تقسیم کر دیا گیا۔ ان چار سنخی حصوں میں سے ایک حصہ پر کا حاصل عمل دریافت کرو۔

مرکز کو مبداء مانو احاطہ کرنے والے افقی نصف قطروں کو محور ۱ اور محور ۲ اور انتصابی نصف قطر کو محور ۳ فرض کرو تو لاکے متوازی دباؤ، ربع مادی پر کے دباؤ کے مساوی ہوگا جہاں مادی، دلا کے علی القوائم مستوی پر سنخی سطح کا عمل ہے۔
اس لئے دلا کے متوازی دباؤ

$$= \text{ج ث } \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16} \text{ ج ث } \frac{1}{4}$$

(۳۲)

اور اس کے نقطہ عالمہ کے محدود ہیں

$$(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}) \text{ دفعہ (۳۴) مثال (۱۱)}$$

اسی طرح دلا کے متوازی دباؤ = $\frac{3}{16} \text{ ج ث } \frac{1}{4}$ جو نقطہ

$$(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$$

پر عمل کرتا ہے۔

حاصل انتصابی دباؤ = مائع کا وزن = $\frac{1}{4} \text{ ج ث } \frac{1}{4}$ اور خط استقیم $\frac{1}{4} \text{ ج ث } \frac{1}{4}$ کی سمت میں عمل کرتا ہے۔

تینوں قوتوں کی سمتیں نقطہ

$$(\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$$

میں سے گزرتی ہیں۔ اور اس لئے وہ ایک تنہا قوت

ماسی سطحوں کے خط تماس سے دو حصوں N و S میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن پر کے دباؤ علی الترتیب اوپر وار اور نیچے وار ہیں۔ اور چونکہ

N میں S پر کا دباؤ = N کے N میں کا وزن

اور S میں N پر کا دباؤ = N کے S میں کا وزن

اس لئے ان کا فرق یعنی N میں N پر کا انتصافی دباؤ = N کے N میں S پر کا وزن

اسی طرح دوسری صورتوں پر غور کیا جاسکتا ہے۔

مشاہدہ طلب ہے کہ یہ تحقق غیر متجانس مائع (جس میں کثافت گہرائی کا ایک تفاعل ہونی چاہئے) کیونکہ مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کثافت کی سطحیں ہوتی ہیں (کی صورت میں بھی درست ہے بشرطیکہ توازن کثافت مائع کی مفروضہ وسعت میں بھی وہی خیال کیا جائے۔

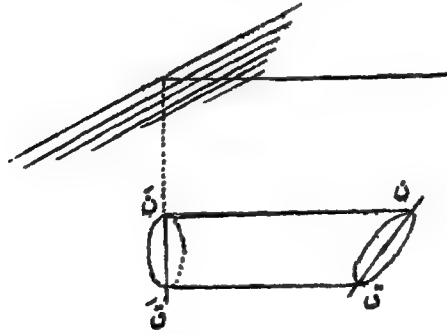
(۴۱)

۴۱۔ سطح N پر کا حاصل افقی دباؤ کسی دی ہوئی سمت میں معلوم کرنا۔

دی ہوئی سمت کے علی القوائم انتصافی سمتی پر N کا نکل لو اور فرض کرو کہ یہ

غل N ق ہے

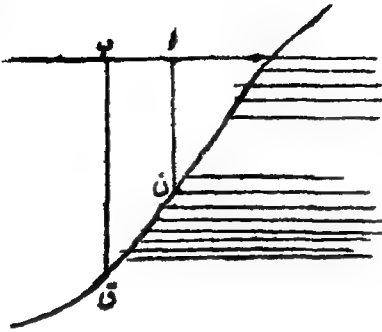
کمیت N ق، N ق پر کے دباؤ، N ق پر کے حامل افقی دباؤ، اور سمتی N ق کے متوازی انتصافی سطحوں میں عمل کرنے والی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے۔



اس لئے N ق پر کا افقی دباؤ N ق پر کے افقی دباؤ کے مساوی ہے۔ اور یہ دباؤ ایک ہی خط مستقیم میں عمل کرتے ہیں یعنی N ق کے دباؤ کے مرکز میں سے گزرنے والے افقی خط میں سے۔

اس لئے عام طور پر کسی سطح پر حاصل دباؤ معلوم کرنے کے لئے اس پر کا انتصافی دباؤ

(۴۲)



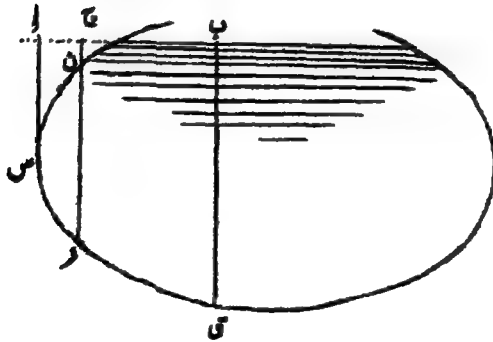
مانع سے بھری ہوئی ہے اور مانع کو نیچے سے خارج کر دیا گیا ہے۔

ن ق کے تمام نقطوں پر کے دباؤ وہی ہیں جو پہلے تھے لیکن متقابل سمتوں میں اور چونکہ اس مفروضہ صورت میں انتصابی دباؤ ق کے وزن کے مساوی ہے اس لئے اصلی صورت میں حاصل انتصابی دباؤ اوپر کی جانب ق کے وزن کے برابر ہوگا۔

اگر سطح کو مانع جزا اوپر کی طرف اور جزا نیچے کی طرف دباؤ تو نقطہ ن میں سے جو سطح کے زیر بحث حصہ کا بلند ترین نقطہ ہے ایک انتصابی سطح مستوی ن رکھیں اور فرض کر دے کہ مانع کی سطح پر ن س ق کا نکل اوج ب ہے۔

تو حاصل انتصابی دباؤ ن س ر پر

$$= \text{ن س ر کے اندرونی مانع کا وزن}$$



لہذا ر ق پر = ج ق کے اندرونی مانع کا وزن
 اور پورا انتصابی دباؤ = ج ق کے اندرونی مانع کا وزن + ن س ر کے اندرونی مانع کا وزن۔

یہ نتیجہ گزشتہ دو صورتوں کی مدد سے بھی حاصل کیا جاسکتا ہے کیونکہ ن ر کا انتصابی

اور نیچے کے مانع کا دائرہ = $\text{جرج (ٹنگ + ٹائی) ب فری}$
 $= \text{ج ب گ (ٹنگ + ٹائی گ)}$
 حاصل دباؤ ان دونوں کا مجموعہ ہوگا جو

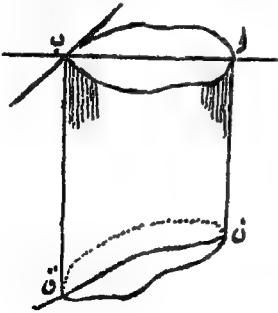
$$= \text{ج ب} \left\{ \frac{1}{2} \text{ٹنگ} + \frac{1}{2} \text{ٹنگ گ} + \frac{1}{2} \text{ٹائی گ} \right\}$$

اس پہلو پر کے سیالی دباؤ کا معیار (اس کے اور آزاد سطح کے خط تقاطع کے گرد)
 $= \text{جرج ٹ ب ی فری} + \text{جرج (ٹنگ + ٹائی) ب گ ی} + \text{فری}$
 اعمال تکمیل کو دور کر کے متذکرہ بالا حاصل دباؤ کے جملہ سے اسکو تقسیم کرنے سے ہمیں دباؤ کے مرکز کی گہرائی حاصل ہو جاتی ہے۔

منحنی سطحوں پر کے حاصل دباؤ

۴۔ ایک متجانس مانع کا جو جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن ہے کسی سطح پر حاصل انتصابی دباؤ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سطح $ن$ ق پر ایک وزن دار مانع کا عمل ہو رہا ہے اور مانع کی آزاد سطح پر اس کا غل و ب ہے۔ مانع کی کیت $وق$ ، مانع کے افقی دباؤ اور $ن$ ق کے تعامل کے باعث متوازن ہے۔ اس تعامل کو انتصابی سمت میں تحلیل کیا جائے تو یہ جزو تحلیل $وق$ کے وزن کے برابر ہونا چاہیے اور برعکس اس کے $ن$ ق پر کا انتصابی دباؤ $وق$ کے وزن کے برابر ہوگا اور اس کی کیت کے مرکز میں سے عمل کریگا۔



اگر $ن$ ق کو مانع ادھر کی طرف دبانے جس طرح کہ دوسری شکل سے ظاہر ہے تو سطح کو خارج کرو۔ اور $ن$ ق کا غل پیٹنے کی طرح مانع کی سطح پر اور فرض کرو کہ فضاء $وق$ اسی قسم کے

کاتب (فنا، عا) بلحاظ معیاری ناقص کے ہے اور مساواتوں

$$\frac{ب^۲ جب ط}{فنا} = \frac{ب^۲ جم ط}{عا} = (گ - ع جب ط + ج جم ط)$$

سے حاصل ہوتا ہے۔ ان مساواتوں سے مساواتیں

$$\left(\frac{ب}{ع} + ع\right) جب ط + ج جم ط = گ$$

$$\left(\frac{ب}{ع} + ج\right) جم ط + ع جب ط = گ$$

حاصل ہوتی ہیں۔

پہلے جب ط کو اور پھر جم ط کو ساقط کر کے حاصل شدہ نتیجوں کا مربع نیکر جمع کریں تو

ہمیں مطلوبہ طریق کی مساوات معلوم ہو جاتی ہے جو

$$(ب^۲ + ع جب ط + ب^۲ فنا + ب^۲ عا) - گ^۲ = (ب^۲ عا + ب^۲ فنا)$$

ہے۔

اگر د اور ہر ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں یعنی اگر ع = ب اور ب =

تو طریق کی مساوات ہو جائیگی

$$\frac{۱}{ب} = \frac{عا}{ب} + \frac{فنا}{ب}$$

۳۹ — ایک برتن میں دو قسم کے مائع میں جو ایک دوسرے کے ساتھ آمیز نہیں ہوتے۔ (۳۹)

برتن کا قاعدہ مستوی ہے اور اس کے پہلو مستوی اور انتصابی ہیں۔ ایک پہلو پر حاصل دباؤ

اور اس کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو۔

فرض کرو کہ اوپر کے مائع کی کثافت ٹ اور گہرائی گ ہے اور نیچے کے مائع کے

لئے متناظر تمام ٹ، اور گ ہیں۔ مشترک سطح افقی مستوی ہونی چاہیے جس کے ہر

نقطہ پر کا دباؤ ج ٹ گ ہوگا اور مشترک سطح کے نیچے ی گہرائی پر کا دباؤ ہوگا

$$ج ٹ گ + ج ٹ ی$$

انتصابی پہلو کا عرض ب لینے سے اس پر اوپر کے مائع کا دباؤ = ب ج ٹ ب گ

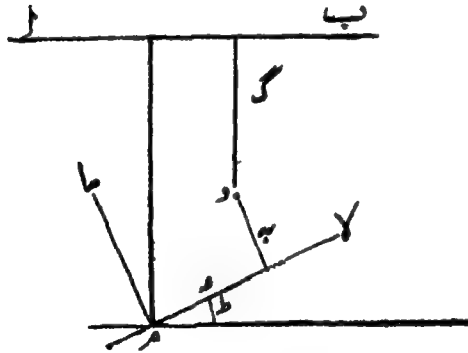
اگر مستوی رقبہ اور آزاد سطح کا خط تقاطع اب ہو تو اب سے دباؤ کے مرکز کا فاصلہ رقبہ اور انتصابی سمت کے درمیانی زاویہ پر منحصر نہیں ہوتا (دفعہ ۳۵) اس لئے ہم رقبہ کو انتصابی لے سکتے ہیں۔

(۳۸) فرض کرو کہ ثابت نقطہ کی گہرائی گ ہے اور رقبہ کے اندر ولا و م ثابت محور ہیں۔
اگر ولا کا سیلان افق کے ساتھ طہ ہو تو
$$د = ج \text{ ث (گ) - لاجب طہ - ماحجم طہ}$$

$$\therefore \text{لا} = \frac{\text{کر کرد لا فر لا فر ما} + \text{ب جب طہ} + \text{ج حجم طہ}}{\text{کر کرد فر لا فر ما} + \text{د ف جب طہ} + \text{ق حجم طہ}}$$

$$\text{او} = \frac{\text{ا} + \text{ب جب طہ} + \text{ج حجم طہ}}{\text{د ف جب طہ} + \text{ق حجم طہ}}$$

جہاں 'ا' 'ب' 'ج' وغیرہ معلومہ مستقل ہیں۔ اب طہ کو ساقط کرنے سے دباؤ کے مرکز کا طریق ایک مخروطی تراش ہوگی۔



دفعہ (۳۶) کے مسئلہ کی مدد سے بھی ہم اس نتیجہ کو اخذ کر سکتے ہیں۔
ہندسی مرکز ہر میں سے گزرنے والے صدری محوروں کو حوالے کے محور قرار دیکر
اور و کے مجدد (ع) ب (ا) فرض کر کے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ دباؤ کا مرکز خط مستقیم
لاجب طہ + ماحجم طہ = - (گ + د جب طہ + ب حجم طہ)

$$r = \frac{1}{2} (a + b - c) = \frac{1}{2} (10 + 10 - 10) = 5$$

۵۔ رخ ا ب ج د پر کا دباؤ (5)

$$= \frac{1}{2} (r + d) = \frac{1}{2} (5 + 10) = 7.5$$

$$= \frac{1}{2} (r + d) = \frac{1}{2} (5 + 10) = 7.5$$

$$= \frac{1}{2} (r + d) = \frac{1}{2} (5 + 10) = 7.5$$

دباؤ کا مرکز مساواتوں

$$L = 5 = \frac{1}{2} (r + d) = \frac{1}{2} (5 + 10) = 7.5$$

$$L = 5 = \frac{1}{2} (r + d) = \frac{1}{2} (5 + 10) = 7.5$$

سے حاصل ہوگا۔

۲۔ پچھلے رخ ع ج د ن کے لئے۔

ع ف اور ع ج کو محاور قرار دو۔ تو کسی نقطہ کے لئے

$$y = \frac{1}{2} (a + b - c) = \frac{1}{2} (10 + 10 - 10) = 5$$

$$r = \frac{1}{2} (a + b - c) = \frac{1}{2} (10 + 10 - 10) = 5$$

اور بقیہ عمل بالکل پہلی صورت کی طرح۔

۵۔ دائرہ کا ایک سرچ انتہائی سمت میں ایک مانع میں عین ڈبو گیا۔ دائرہ ایک کنارہ

(۳۷)

مانع کی سطح میں ہے اور مانع کی کثافت ایسے ہوتی ہے جیسے گہرائی۔

سطح کے اندر کے کنارے کو محور دلا قرار دیں تو $f = 5$ دے پھر $r = 5$ دے

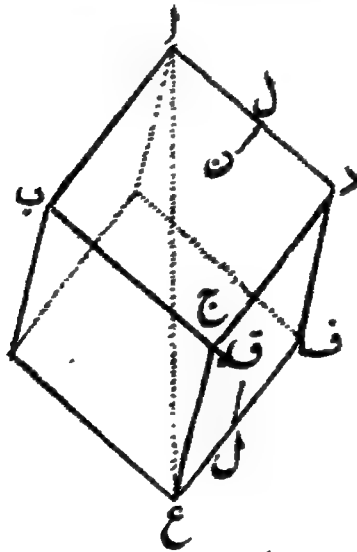
اس لئے دباؤ کا مرکز مساواتوں

$$= \int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \frac{1}{1-x} \Big|_0^1 = \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1-0} = \frac{1}{0} - 1 = \infty - 1 = \infty$$

اور دہلی کے سرکوب ہندی

$$\frac{1}{1 - \frac{2x}{m}} - \frac{1}{x} = \frac{\frac{x}{m} - \frac{x}{m}}{\frac{x}{m} - \frac{x}{m}} =$$

(۳) ایک کھوکھلا کعبہ مانع سے تقریباً بھر دیا گیا ہے۔ یہ کعبہ اپنے ایک انتصابی دتر کے گرو یکساں موپر پر گھومتا ہے۔ ان کے مختلف رخنوں پر کے واؤ اور ان کے کے واؤ کے مرکز معلوم کرو۔



۱۔ اوپر کے رخ اباج دے کے۔

۱۱) جب کو محور لا اور محور ما قرار دو۔ اور فرض کرو کہ کسی نقطہ (لاما) کے نقطہ سے افقی اور امتضابی فاصلے می اور رہیں تو

$$5x + 2 = \frac{1}{x} = \frac{2}{5}$$

ی = $\frac{a+b}{3}$ ، شکستہ خط ۱۱ ن کا اع پر نقل لینے سے،

$$\therefore \bar{L} = \frac{3}{8} \quad \bar{M} = \frac{3}{14}$$

قطبی محور استعمال کرنے سے اور دلا کو ابتدائی خط لینے سے ہیں ج ج ث ر جب طہ حاصل ہونا چاہیے اور

$$\bar{L} = \frac{\text{کرکر ر جسم طہ فر فر طہ}}{\text{کرکر ر جسم طہ فر فر طہ}} = \frac{3}{8}$$

$$\bar{M} = \frac{\text{کرکر ر جسم طہ فر فر طہ}}{\text{کرکر ر جسم طہ فر فر طہ}} = \frac{3}{14}$$

(۲) ایک دائری رقبہ جس کا نصف قطر اسے انتصابی سمت میں ڈیویا گیا ہے اور اس کا مرکز ہندی گہرائی گ پ واقع ہے۔

مرکز کو مبداء اور اس میں سے گزرنے والے نیچے دار انتصابی خط کو ابتدائی خط قرار دو۔ اگر نقطہ (ر طہ) پرکا دباؤ د ہو تو

$$د = ج ث (گ + ر جسم طہ)$$

اور مرکز کے نیچے دباؤ کے مرکز کی گہرائی

$$\frac{2}{\text{کرکر ر جسم طہ (گ + ر جسم طہ) فر فر طہ}} = \frac{2}{\text{کرکر ر جسم طہ (گ + ر جسم طہ) فر فر طہ}}$$

نتیجہ دفعہ (۳۶) کے مسئلہ سے فوراً اخذ کیا جاسکتا ہے۔

(۳) ایک انتصابی مستطیل جس کا عرض افقی ہے کہ ہوائی کے زیر عمل ہے جو مستقل تیش پر ہے۔

اگر مستطیل کے قاعدہ پرکہ ہوائی کا دباؤ ۲ ہو تو ی بلندی پر دباؤ ۲ نوم ہوگا دفعہ (۱۲) اور اگر ب سے مستطیل کا عرض تعبیر ہو مستطیل کی ایک افقی پٹی پرکا دباؤ

$$۲ = \text{نوم} \times ب صف ی$$

∴ اگر مستطیل کا طول و ہو تو اس پرکا حاصل دباؤ

$$\text{تو } \frac{((ع - لا) جم ط - ما جب ط) لا فرما فرما}{((ع - لا) جم ط - ما جب ط) فرما فرما} = \frac{ع}{جم ط}$$

اور اسی طرح $ما = \frac{جم ط}{ع}$ جب ط

∴ (لا ، ما) خط مستقیم

$$لا جم ط + ما جب ط = ع$$

کا قطب بلحاظ معیاری ناقص کے ہے۔

۳۷۔ دباؤ کا مرکز معلوم کرنے کی مثالیں۔

(۱) دائرہ کا ایک ربع انتصابی سمت میں ایک وزن دار سنجاس مانع میں عین ڈبو گیا ہے

اور اس کا ایک کنارہ مانع کی سطح میں ہے۔

اگر سطح کے اندر کے کنارے دلا کو

محور لا قرار دیا جائے تو

$$\frac{لا جم ط}{جم ط} = \frac{لا}{جم ط}$$

$$\frac{لا جم ط}{جم ط} = \frac{لا}{جم ط}$$

$$\frac{لا جم ط}{جم ط} = \frac{لا}{جم ط}$$

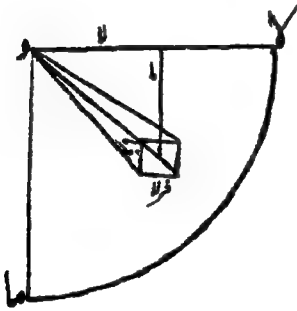
$$\frac{لا جم ط}{جم ط} = \frac{لا}{جم ط}$$

ما کے لئے حد و مکمل وہی ہیں جو لا کے لئے ہیں۔

$$\text{اب چونکہ } \frac{لا جم ط}{جم ط} = \frac{لا}{جم ط} \text{ (لا - لا) فرما} = \frac{لا}{جم ط}$$

$$\frac{لا جم ط}{جم ط} = \frac{لا}{جم ط} \text{ (لا - لا) فرما} = \frac{لا}{جم ط}$$

$$\frac{لا جم ط}{جم ط} = \frac{لا}{جم ط} \text{ (لا - لا) فرما} = \frac{لا}{جم ط}$$



$$\begin{aligned} \text{لا} &= \frac{\text{ا ا ج ٹ گ لاجم طه فرما فرلا}}{\text{ا ا ج ٹ گ جم طه فرما فرلا}} \quad \text{،} \quad \text{ما} = \frac{\text{ا ا ج ٹ گ لاجم طه فرما فرلا}}{\text{ا ا ج ٹ گ جم طه فرما فرلا}} \quad \text{سے لینے} \\ \text{لا} &= \frac{\text{ا ا ج ل فرما فرلا}}{\text{ا ا ج ل فرما فرلا}} \quad \text{،} \quad \text{ما} = \frac{\text{ا ا ج ل فرما فرلا}}{\text{ا ا ج ل فرما فرلا}} \quad \text{سے حاصل ہوتا ہے۔} \end{aligned}$$

پس یہ ظاہر ہے کہ دباؤ کے مرکز کی گہرائی گہرے ہوئے سیال کی کمیت کے مرکز کی گہرائی کا دو چند ہے۔

۳۶ — وزن دار مائع کی صورت میں دباؤ کے مرکز کا مقام مسئلہ ذیل سے ہندسی طور پر حاصل ہو سکتا ہے۔

اگر قہر کے مستوی میں ایک ایسا خط مستقیم لیا جائے جو مائع کی سطح کے متوازی اور قہر کے مرکز ہندسی سے اتنا ہی نیچے واقع ہو جتنا اس سے (مرکز ہندسی سے) مائع کی سطح اور واقع ہے تو اس خط مستقیم کا قطب لمبا تا مرکز ہندسی پر کے معیاری قطع ناقص کے جس کے نیم محور اس نقطہ پر گردش کے صدی نیم قطر ہیں دباؤ کا مرکز ہوگا۔

رقبہ کو ۱ اور گردش کے صدی نصف قطروں کو ۱، ۱، ب، فرض کرو تو یہ صدی نصف قطران مساواتوں سے معلوم ہوتے ہیں۔

$$\text{ا ب} = \frac{\text{ا ا ل فرلا فرلا}}{\text{ا ا ل فرلا فرلا}} \quad \text{،} \quad \text{ا ا} = \frac{\text{ا ا ل فرلا فرلا}}{\text{ا ا ل فرلا فرلا}}$$

معیاری (Momentary) ناقص کی مساوات ہے

$$1 = \frac{\text{ا ا}}{\text{ب}} + \frac{\text{ا ا}}{\text{ا ا}}$$

جہاں جو ا ل کے محور مرکز ہندسی پر کے صدی محور ہیں۔
فرض کرو کہ لا، ما دباؤ کے مرکز کے محدود ہیں اور سطح میں کے خط کی مساوات ہے

$$\text{لاجم طه} + \text{ما جب طه} = \text{ع}$$

د = ج ث موجب طہ ، اور اس لئے

$$\frac{\text{لا} = \frac{\text{کر لا مافرما فرلا}}{\text{کر مافرما فرلا}}}{\text{آ} = \frac{\text{کر مافرما فرلا}}{\text{کر مافرما فرلا}}} \dots\dots\dots (بہ)$$

ان آخری مساواتوں (بہ) سے ظاہر ہے کہ دباؤ کے مرکز کا مقام مستوی اور افق کے درمیانی فاصلہ پر منحصر نہیں ہوتا۔ اس لئے اگر مستوی اور سیال کی سطح کے خط تقاطع کے گرد مستوی کو گھمایا جائے تو دباؤ کے مرکز کے مقام میں تبدیلی واقع نہیں ہوگی۔

اگر مساواتوں (د) میں گ کو مستقل قرار دیا جائے یعنی اگر مستوی کو افق فرض کیا جائے تو آ اور م رقبہ کے مرکز ہندسی کے محدود ہو جاتے ہیں اور یہ نتیجہ دفعہ ۱ کے مطابق ہے۔ لیکن مساواتوں (بہ) میں آ اور م کی قیمتیں طہ پر منحصر نہیں ہیں اور طہ کے محدود ہونے سے ان کی شکل پر کوئی فرق نہیں آتا اور اس صورت میں مرکز ہندسی کے محدود حاصل نہیں ہوتے۔ اس ظاہر ہی بے غما بطل کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے۔ طہ کو کٹنا ہی چھوٹا لیا جائے مستوی اور سیال کی سطح کا درمیانی سیال ہمیشہ نانہ کی شکل میں ہوگا۔ اور مستوی کے مختلف تقاطع پر کے دباؤ اگرچہ انتہا میں سبب محدود ہوتے ہیں لیکن یہ مساویت کی نسبتوں میں محدود نہیں ہوتے بلکہ طہ کی کسی محدود قیمت کے لئے یہ دباؤ جو مستقل نسبتیں آپس میں رکھتے ہیں ان مستقل نسبتوں میں یہ صفر ہوتے ہیں۔

اس دفعہ کی مساواتیں استدلال ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہیں۔

مستوی رقبہ کو محدود کرنے والے خط کے ہر نقطہ سے انتصابی خطوط سیال کی سطح تک کھینچو۔ ہر سطح سیال کی کچھ کثیت ان میں گھر جائیگی۔ سب مستوی کے تعامل کا انتصابی جزو تخلیلی سیال کی اس کثیت کے وزن کے برابر ہوگا اور یہ وزن کثیت کے مرکز میں سے گزرنے والے انتصابی خط میں عمل کرے گا اور جہاں پر یہ خط مستوی رقبہ کو ملے گا وہ دباؤ کا مرکز ہوگا۔

وہی محور تو ایک عنصری منشور کا وزن جو مستوی کے نقطہ (لا، م) میں سے عمل کرتا ہے ج ث گ ص ف لا م ف م ا جم طہ ہوگا جہاں افق کے ساتھ مستوی کا میلان طہ ہے اور اس لئے مستوی کے نقطوں پر عمل کرنے والی ان متوازی قوتوں کا مرکز مساواتوں

تو $\text{ما} \times \text{کر د فرما فرلا} = \text{ولا کے گرد حاصل دباؤ کا معیار}$
 $= \text{ولا کے گرد رقبہ کے تمام عناصر پر کے دباؤں کے معیاروں کا مجموعہ}$

$$= \text{ح د مسٹ ماسٹ لا} \times \text{ما}$$

$$= \text{کر د م فرما فرلا}$$

$$\text{ما} = \frac{\text{کر د م فرما فرلا}}{\text{کر د فرما فرلا}}$$

$$\text{لا} = \frac{\text{کر د لا فرما فرلا}}{\text{کر د فرما فرلا}} \quad \text{اسی طرح}$$

تھیکے رقبہ زیر بحث پر لئے گئے ہیں۔
 اگر قطبی محدود استعمال کئے جائیں تو اسی طرح کے طریق عمل سے

$$\text{لا} = \frac{\text{کر د راجم طہ فر فرطہ}}{\text{کر د ر فر فرطہ}} \quad ، \quad \text{ما} = \frac{\text{کر د راجب طہ فر فرطہ}}{\text{کر د ر فر فرطہ}}$$

۳۵۔ اگر سیال متجانس اور بے پچک ہو اور صحت جاذبہ ارض ہی عمل کرے تو
 د = ج ث گ

جہاں گ سطح کے نیچے نقطہ ن کی گہرائی ہے۔ اس لئے اس صورت میں

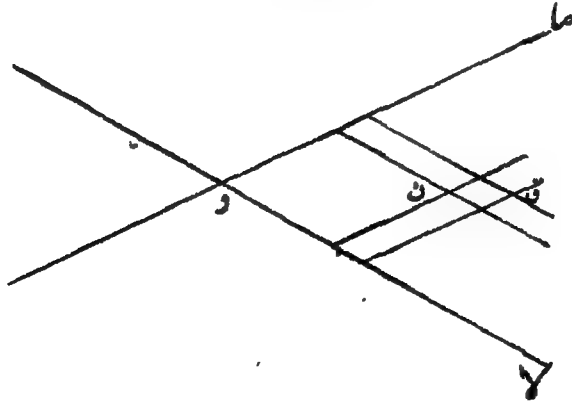
$$\text{لا} = \frac{\text{کر گ لا فرما فرلا}}{\text{کر گ فرما فرلا}} \quad ، \quad \text{ما} = \frac{\text{کر گ م فرما فرلا}}{\text{کر گ فرما فرلا}} \quad \dots (ع)$$

بعض اوقات مستوی اور سیال کی سطح کے خطا قاطع کو ایک محور مقرر کرنا مفید ثابت ہوتا ہے۔ اگر
 اس خط کو ہم محور لا فرض کریں اور مستوی اور افق کے درمیان زاویہ طہ ہو تو

تورقہ کے غرض مٹ لا مٹ ما پر کا دباؤ = د مٹ لا مٹ ما
 د حاصل دباؤ = $\frac{د}{\text{فر}} \times \text{فر}$
 جہاں تکمیل کل رقبہ زیر بحث پر لیا گیا ہے۔
 اگر قطبی محدود استعمال کے جائیں تو حاصل دباؤ

$$= \frac{د}{\text{فر}} \times \text{فر}$$

۳۳۔ تعریف سطح مستوی کی صورت میں دباؤ کا مرکز وہ نقطہ ہے جہاں مستوی سے اس تنہا قوت کی سمت ملتی ہو جو مستوی سطح پر کے تمام سیالی دباؤں کے حاصل کے مساوی ہے۔
 یہاں دباؤ کے مرکز کی تعریف مستوی سطحوں کے لحاظ سے کی گئی ہے۔ آئندہ یہ معلوم ہو گا کہ سختی سطحوں پر سیالات کا حاصل عمل ہمیشہ ایک تنہا قوت میں تحلیل نہیں کیا جاسکتا۔
 (۳۲) وزن داریال کی صورت میں یہ ظاہر ہے کہ افقی رقبہ کا دباؤ کا مرکز اس کا مرکز ہندسی ہو گا کیونکہ اس کے ہر نقطہ پر کا دباؤ مساوی ہے اور چونکہ گہرائی کے بڑھنے کے ساتھ دباؤ بھی بڑھتا جاتا ہے اس کے غیر افقی مستوی میں دباؤ کا مرکز ہندسی کے نیچے واقع ہو گا۔
 کسی مستوی رقبہ کا دباؤ کا مرکز معلوم کرنے کے لئے ضابطے۔ غرض کر کہ مستوی کے اندر علی القوائم محاورے کے لحاظ سے کسی نقطہ کے محدود (لا، ما) ہیں اور اس پر کا دباؤ د، اور اس کے ساتھ کے نقطہ کے محدود (لا + مٹ لا، ما + مٹ ما) ہیں۔
 نیز (لا، ما) دباؤ کے مرکز کے محدود ہیں۔



باب سوم

سطحوں پر سیالات کا حاصل دباؤ

۳۳۔ ہم نے گذشتہ باب میں یہ دیکھا ہے کہ سیال کے کسی نقطہ پر دباؤ کس طرح معلوم کیا جاتا ہے جبکہ سیال دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو۔ اب ہم اُن دباؤ کے حامل دریافت کریں گے جو سیال سطحوں پر پیدا کرتے ہیں جن کے ساتھ وہ تماس رکھتے ہوں۔
سطحوں پر سیال کے عمل کو ہم اس ترتیب سے بحث میں لائیں گے۔ پہلے سیالات کا عمل مستوی سطحوں پر پھر جاذبہ ارض کے ماتحت سیال کا عمل منحنی سطحوں پر اور آخر میں کسی دی ہوئی قوتوں کے ماتحت ساکن سیال کا عمل منحنی سطحوں پر۔

مستوی سطحوں پر سیالی دباؤ

چونکہ مستوی کے تمام نقطوں پر دباؤ مستوی پر عمود وار ہوتے ہیں اور ایک ہی سمت میں عمل کرتے ہیں اس لئے حاصل دباؤ ان تمام دباؤں کا مجموعہ ہوتا ہے۔
پس اگر سیال بے پچک ہو اور صرف جاذبہ ارض کے زیر عمل ہو تو کسی مستوی پر کا حاصل دباؤ

$$= \text{ج ث ی فر ا جہاں مستوی رقبہ کے عنصر فر ا کی گہرائی ی ہے۔}$$

$$= \text{ج ث ی ا}$$

جہاں ا سے مستوی کا رقبہ اور ج ث ی سے اس کے مرکز ہندسی کی گہرائی تعبیر ہوتی ہے۔
عام طور پر اگر سیال کسی قسم کا ہو اور دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہو تو مستوی کے اندر محور لا اور مالو اور فرض کر دو کہ نقطہ (لا) پر دباؤ د ہے۔

میں متوازن ہو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ پہلی صورت میں مرکز پر کا دباؤ دوسری صورت میں مرکز پر کے دباؤ سے بقدر

$$\frac{4}{3} \pi \rho (R - \frac{1}{2} r) \left[\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{R} \right) \left(1 + \frac{r}{R} \right) \left(1 + \frac{r}{R} \right) \right]$$

کے بڑا ہے۔

۳۵۔ ایک متجانس تجاذبی ٹھوس سطح = $\{ 1 + \frac{r}{R} \}$ (جمطہ) سے محدود ہے۔ اس ٹھوس کی کیت ک اور کثافت ρ ہے اور $\frac{1}{2}$ اتنا چھوٹا ہے کہ اس کا مربع نظر انداز کیا جاسکتا ہے۔ یہ ٹھوس ایک تجاذبی مائع سے جسکی کیت ک اور کثافت σ سے گھرا ہوا ہے ثابت کرو کہ آزاد سطح کی مساوات تقریباً

$$r = b \left\{ 1 + \frac{r}{R} \right\} \left(\text{جمطہ} \right)$$

ہے جہاں

$$b^2 = \frac{3}{4\pi\rho} \left\{ \frac{k}{R} + \frac{k}{\sigma} \right\}$$

اور

$$r = \frac{3}{4\pi\rho} (R - \frac{1}{2} r) \left(1 + \frac{r}{R} \right)^2$$

۳۶۔ ایک کیساں بے پچک سیال کی کیت تجاذبی اکائیوں میں ک ہے۔ اپنی ذاتی کشش کے زیر اثر یہ ایک کرہ کی شکل اختیار کرتا ہے جس کا نصف قطر ρ ہے اسکو ایک کمزور قوت کے میدان میں رکھا گیا ہے جس کا تجاذبی قوت ہے

$$Z = \frac{r}{1 + \frac{r}{R}} \left(\text{جمطہ} \right) \left(1 - \frac{r}{R} \right)$$

جہاں $\frac{r}{R}$ کی اوسط کردی سطح کے مرکز سے ر ناپا گیا ہے۔ مہ کے محور کی رتوں کے مربع نظر انداز کئے جاسکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ آزاد سطح کی مساوات ہے۔

اگر سطح

$$\frac{1}{\text{پ}} = \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ا}}$$

کے کسی نقطہ پر کا دباؤ ثابت ہو تو ثابت کرو کہ نول کے اندر کثیت کے مساوی حصوں کے حساب سے اوسط دباؤ ہوگا

$$\frac{1}{\text{پ}} = \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ا}}$$

۴۲ — ایک بند نصف کرہی برتن کا نصف قطر دہے۔ اسکو اس طرح رکھا گیا ہے کہ اس کی مستوی سطح افقی اور اوپر وار رہے اس میں متجانس وزن دار مائع ڈالا گیا ہے جو محور کی طرف ایسی قوت سے جذب ہوتا ہے جو محور سے فاصلہ کے معکب کے تناسب معکوس میں ہے۔ مائع کا حجم اس قدر ہے کہ اس کی آزاد سطح نصف کرہ کو اس سے زاوی فاصلہ $\frac{\pi}{3}$ پر ملتی ہے۔ اگر یہ نظام محور کے گرد یکساں زاوی رفتار سے گھومے تو آزاد سطح برتن کے مستوی سطح کو کنارہ پر ایسے دائرہ میں ملتی ہے جس کا نصف قطر ب ہے ثابت کرو کہ اکائی فاصلہ پر قوت سے $\frac{1}{\text{پ}}$ ہونی چاہیے اور ب اور سے مساوات ذیل سے مربوط ہیں

$$\frac{1}{\text{پ}} = \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ا}}$$

۴۳ — مائع کی کچھ یکساں کثیت کرہی شکل کی ہے۔ اس کی کثافت ρ ہے اور نصف قطر اس کے گرد دوسرے چمک مائع ہے جس کی کثافت σ ہے اور بیرونی نصف قطر ب ہے۔ یہ پورا نظام صرف اپنے ذاتی متجاذب کی وجہ سے توازن میں ہے اور نیز کوئی بیرونی دباؤ عمل نہیں کرتا۔ ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{1}{\text{پ}} = \frac{1}{\text{ج}} + \frac{1}{\text{ب}} + \frac{1}{\text{ا}}$$

۴۴ — ایک بے چمک سیال کی یکساں کرہی کثیت جس کی کثافت ρ ہے اور نصف قطر دہے دوسرے بے چمک سیال سے جس کی کثافت σ ہے اور بیرونی نصف قطر ب ہے گھری ہوئی ہے پورا سیال اپنے جائزہ کی وجہ سے توازن میں ہے اور کوئی بیرونی دباؤ یا قوتیں عمل نہیں کرتیں دو نول سیالوں کو ملا کر اسی حجم کا ایک متجانس سیال تیار کیا گیا ہے اور پھر یہ کثیت کرہی شکل

(لا، ما، ی) برتوت (فی اکائی کیت) کے اجزائے تحلیل - ۱ لا - ب ما - ج ی ہیں۔
 مبادی پر دباؤ اور کثافت علی الترتیب د اور ث کے مساوی ہیں۔ ثابت کر دو کہ

$$ا ب ج ث ک = ۸ ۳۱۱ د$$

۳۹ — ہوا کی دی ہوئی کیت ایک برابر اسطوانہ میں ہے جس کا محور انقباضی ہے ہوا
 اسطوانہ کے محور کے گرد امانی توازن میں گھوم رہی ہے۔ محور کے بلند ترین نقطہ پر دباؤ
 د اور اس کی مغنی سطح کے بلند ترین نقاط پر دباؤ د ہے۔ ثابت کر دو کہ اگر سیال مطلق طور
 پر ساکن ہوتا تو محور کے بالائی نقطہ پر کا دباؤ

(د-۵) ہوتا، جہاں ہوا کا وزن بھی محسوب کیا گیا ہے۔

$$لوک د - لوک د$$

۴۰ — گیس کی کچھ کیت مستقل تپش پر ایسی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے جن کا قوت فضا
 کے کسی نقطہ پر نہ ہے (فضا کے مدد دی شرائط کچھ بھی ہو سکتے ہیں)۔ اس نقطہ پر جہاں نہ
 صفر ہوتا ہے دباؤ ۱۱ اور کثافت ث ہے۔

اب گیس پر سے قوتوں کا عمل ہٹا دیا گیا ہے اور اسکو ایسی فضا میں بند کیا گیا ہے جہاں
 اس کی کثافت یکساں مشابہتی ہے۔ ثابت کر دو کہ پھیلاؤ کے باعث گیس میں ذاتی توانائی
 بالقوہ کا نقصان ہے

ث کر کر ذ قو ث فرح

جہاں تک کل گیس بھر میں لئے گئے ہیں جبکہ وہ ابتدائی حالت میں تھی۔
 ۴۱ — ایک پچکڑا سیال کی دی ہوئی کیت ک ایک استوار خول میں داخل کی گئی

اس خول کی مساوات $\frac{۱}{۱۱} + \frac{۲}{ب} + \frac{۳}{ج} = ۱$ ہے اور سیال کے لئے کلیہ د م ث
 درست رہتا ہے یہ سیال ایسی قوتوں کے نظام کے زیر عمل سکوں اختیار کرتا ہے جس کا قوتی
 تفاعل ہے $\frac{۱}{۱۱} (لوک + \frac{۲}{ب} + \frac{۳}{ج})$ + مستقل

۳۴۔ مانع کی کچھ مقدار جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی ایک اٹنے مکانی نما میں جس کا وتر خاص ج ہے ف ارتقاع تک بھری ہوئی ہے ثابت کر دو کہ اس کی کثافت ایسے بدلے گی جیسے گہرائی کا مربع اگر اس کو ایسے برتن میں منتقل کیا جائے جسکی شکل منحنی

$$۱۶۴ = ۲ ج ف (۱ - ۱۶۲) (۱ - ۱۶۲)$$

کو محور لاکے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے جہاں کوئی مستقل ہے۔

۳۵۔ جاذب بالذات مانع کی کمیت جسکی کثافت ف ہے توازن میں ہے قانون کشش معکوس مربع کا قانون ہے۔ ثابت کر دو کہ مانع کے کسی کرہ میں اوسط دباؤ مرکز پر کے دباؤ سے بقدر $\frac{۲}{۳} ف$ کے کم ہوگا جہاں رکرہ کا نصف قطر ہے۔

۳۶۔ ایک بند کھوکھلا قائم مستوی مخروط ایک افقی مستوی پر اپنے قاعدہ پر کھڑا ہوا ہے۔ اس کو مانع سے عین بھر دیا گیا جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس کے بعد اسکو الٹ کر اس طرح تھاما گیا ہے کہ اس کا اس عین مستوی پر جو اور محور انتصابی ہو۔ ثابت کر دو کہ اسکی منحنی سطح پر کا حاصل دباؤ مقدار میں غیر متغیر رہتا ہے لیکن مانع کی توانائی بالقوہ نسبت

$$۲ \left\{ جا \left(\frac{۱}{۲} \right) \right\} : ۳ جا \left(\frac{۱}{۲} \right)$$

سے بدلتی ہے۔ یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ اگر مانع کو مستوی پر ڈال دیا جائے تو توانائی بالقوہ صفر ہوتی ہے۔

۳۷۔ ایک سیال قانون

$$(ث - ثب) = (د - د)$$

کے مطابق خفیف طور پر رہتا ہے جہاں ۲ ایک چھوٹی مقدار ہے۔ ثابت کر دو کہ اس سیال کی $\frac{۲}{۳} ث$ و $\frac{۲}{۳} ثب$ کمیت اپنے ذاتی تجاذب اور بیرونی دباؤ د کے زیر عمل ایک کر دی شکل اختیار کرتی ہے جسکا نصف قطر تقریباً

$$\frac{۱}{۲} (۱ - \frac{۲}{۳} \times \frac{۲}{۳} ث) = \frac{۲}{۳} ث$$

۳۸۔ گیس کی ک کمیت جو مستقل پیش ہے تمام فضا میں پھیلا دی گئی ہے اور ہر نقطہ

رفار معلوم کرو کہ جس سے بلند ترین نقطہ پر دباؤ صفر رہ سکے اور اس صورت میں قاعدہ پر کا دباؤ بھی معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک سیدھا ڈنڈا جس کا ہر ذرہ ایسی قوت سے کشش کرنا ہے جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے متجانس بے پچک سیال کی کثیت سے گھرا ہوا ہے۔ مساوی دباؤ کی سطحوں کی شکل معلوم کرو۔

۲۵۔ ایک تیز دار مائع افقی مستوی پر بہتا ہوا ہے اور ایک ثابت مرکز کی طرف ایسی مستقل قوت سے جذب ہو رہا ہے جس کی شدت جاذبہ ارض کے مساوی ہے۔ مساوی دباؤ کی سطحوں کی شکل معلوم کرو۔

تیز مستوی پر کا دباؤ معلوم کرو اور ثابت کرو کہ جب مستوی قوت کے مرکز میں سے گزرتا ہے تو یہ دباؤ مائع کے وزن کا $\frac{1}{2}$ ہوتا ہے۔ نیز مستوی پر کا دباؤ اس صورت میں بھی معلوم کرو جبکہ مستوی قوت کے مرکز کے نیچے یا اوپر واقع ہو۔

۲۶۔ ایک ہڈات خول کا دو گزنی سطحیں احاطہ کرتی ہیں جو ہم مرکز نہیں خول کا مادہ قدرت کے قانون کی بموجب کشش کرتا ہے خول کے اندر کے حصہ کو متجانس مائع سے جڑا بھر دیا گیا ہے جو اس کے ساتھ یکساں رفتار سے کروں کے مرکز میں سے گزرتا ہے خول کے اندر کے حصہ کو متجانس مائع سے جڑا بھر دیا گیا ہے جو اس کے ساتھ

۲۷۔ ایک استوار گردی خول متجانس بے پچک سیال سے بھر دیا گیا ہے جس کا ہر ذرہ ایک دوسرے کو ایسی قوت سے جذب کرتا ہے جو فاصلہ کے مربع کے بالعکس بدلتی ہے ثابت کرو کہ سطح پر کے دباؤ اور سیال کے کسی اندرونی نقطہ پر کے دباؤ کا فرق اس نقطہ میں سے گزرنیوالی کروہ کی چھوٹی سے چھوٹی تراش کے رقبہ کے متناسب ہے۔

۲۸۔ ایک کھلا برتن جس میں مائع ہے یکساں زاویہ رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھمایا گیا ہے برتن کی شکل اور اس کے ابعاد معلوم کرو کہ وہ عین خالی ہو جائے۔

۲۹۔ متجانس سیال کی ایک غیر محدود کثیت ایک بند سطح کے گرد ہے اور سطح کے اندرونی نقطہ (۱) کی طرف ایسی قوت سے جذب ہو رہی ہے جو فاصلہ کے کعب کے متناسب معکوس میں ہے اگر سطح کے کسی نقطہ پر کے عنصر پر جو دباؤ ہے اسے سمت N و O میں تحلیل کیا جائے تو ثابت کرو کہ اس طرح حاصل شدہ تمام نقطوں کے قطری دباؤں کا مجموعہ مستقل رہتا ہے خواہ سطح کی جسامت اور اس کی شکل کچھ ہی ہو بشرطیکہ نقطہ N سے لا متناہی

سے حاصل ہوتی ہیں جہاں نہ اختیار ہی مبدل ہے۔

۲۰۔ ایک کھوکھلا کرہ جس کا نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہے اکائی کثافت کے متجانسائع سے عین بھر دیا گیا ہے۔ اسکو دو خارجی جاذب مرکزہی قوتوں $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان جن کا باہمی فاصلہ ج ہے ایسے مقام پر کھوکھلا کرہ قوتوں کی وجہ سے اس کے مرکز پر کشش مساوی و متقابل ہیں۔ ثابت کرو کہ کسی نقطہ پر کا دباؤ ہے

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{r} - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{r} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\}$$

۲۱۔ ایک کرہ جس کا نصف قطر ج ہے متجانسائع سے توڑیا بھر دیا گیا ہے یہ کرہ قوت کے دو بیرونی مرکزوں کے زیر اثر ہے جو کرہ کے قطر پر مرکز کی متقابل جانبوں میں اس کے فاصلوں پر واقع ہیں کسی نقطہ پر قوت کے ہر مرکز کی کشش فاصلہ کے مربع کے تناسب میں ہے اور مائع کی کثیت پر ان کی کشش بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ ج ۳ میں ہیں۔

(۱۲۴)

اگر $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{2}$ کے درمیان واقع ہوتو ثابت کرو کہ مرکز پر کا دباؤ ہے

$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{r} - \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{r} \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right\}$$

۲۲۔ ایک مائع کی کثافت جو ایک اسطوانی برتن میں ہے ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی۔ اس کو وہ سرے برتن میں منتقل کیا گیا ہے جس میں کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی کا مربع۔ اس نئے برتن کی شکل معلوم کرو۔

۲۳۔ ایک مستطیل مخروط جس کا زاویہ راس $\frac{1}{2}$ ہے پانی سے عین بھر دیا گیا ہے اور اس کا ایک کون ایک افقی مستوی میں مضبوط چڑوایا گیا ہے مستوی کو کیساں زاویہ راس سے ایک انحصالی عمود کے گرد جو مخروط کے راس میں لگتا ہے گھمایا گیا ہے۔ جی سے بڑی

۱۴ — اگر مانع کے ایک عنصر (جو نقطہ لا، ا، ی پر ہے) پر عمل کرنے والی قوتوں کے اجزائے
تخلیلی محوروں کے متوازی علی الترتیب

$$۲ا + ۲ما + ۲ی + ۲می + لا + لا، لا + ۲ + لا + لا + ۲ا$$

کے تناسب ہوں تو ثابت کرو کہ توازن ممکن ہو سکتی صورتیں ہیں حاصل ہونا چاہیے

$$۲ا = ۲ما = ۲ی = ۲می = لا = لا، لا = ۲ + لا + لا + ۲ا$$

۱۵ — مانع کی کچھ کیفیت تو ہوں

$$لا = (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا$$

کے پیرل توازن میں ہے۔ کثافت معلوم کرو اور ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں گردش (مندانہ) ہیں
۱۶ — مانع قوت کے ایک میدان میں ساکن ہے جہاں

$$لا = لا + ی - لا، لا = لا + ی - لا، لا = لا + ی - لا، لا = لا + ی - لا$$

ثابت کرو کہ مساوی دباؤ اور کثافت کے منحنی دائروں کا ایک جٹ ہیں۔

$$۱۷ — اگر لا = (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا$$

تو ثابت کرو کہ مساوی دباؤ اور کثافت کے منحنی ما (لا + ی) = مستقل اور
ما + ی = مستقل سے حاصل ہوتے ہیں

۱۸ — مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرو جبکہ کسی نقطہ (لا، ا، ی) پر کی قوتوں کے اجزائے
تخلیلی ما (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا، لا = (ما + ی) - لا
زائد سی مسکافی نہا ہیں

$$ما (لا + ی) = ج (ما + ی)$$

۱۹ — مانع قوتوں کے دے ہوئے نظام کے زیر عمل متوازن ہے اگر کم = فہ (لا، ا، ی)
مشر = فہ (لا، ا، ی) کسی نقطہ پر کی کثافت کی دو ممکن قیمتیں ہوں تو ثابت کرو کہ ہر
صورت میں مساوی دباؤ کی سطحوں کی مساواتیں

$$فہ (لا، ا، ی) + لا فہ (لا، ا، ی) = ۰$$

کے منحنی قائم زائد ہیں۔

۸۔ ایک ٹھوس کرے کے اندر دوسری جوف میں جنکے نصف قطر ٹھوس کرے کے نصف قطر کے نصف ہیں لہذا دائرے سے بھردیا گیا ہے۔ ٹھوس اور مائع کے ذرات ایسی قوتوں سے ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں جو ایسے بدلتی ہیں جیسے فاصلہ ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں ٹھوس کرے کے حجم مرکز کرے ہیں۔

۹۔ ثابت کرو کہ قوتیں جو

لا = مہ (ما + مای + می) ، ما = مہ (می + می + می لا + لا) لے = مہ (لا + لا + لا) سے تعمیر ہوتی ہیں مائع کی کثیت کو ساکن رکھنے کی کثافت ایسے بدلتے جیسے مستوی لا + مای + می = ۰ سے (فاصلہ) نیز ثابت کرو کہ مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے منحنی دائرے ہیں۔

۱۰۔ اگر ایک مخروطی بیالی مائع سے بھردیا جائے تو ثابت کرو کہ مائع کے حجم میں کسی نقطہ پر کے اوسط دباؤ اور پیالہ کی سطح کے ایک نقطہ پر کے اوسط دباؤ میں نسبت ۳:۲ ہوگی۔

۱۱۔ ایک بے وزن برتن قائم مخروط کی شکل کا ہے جس کا زاویہ راس ۲۰ ہے۔ برتن کو مائع سے بھردیا گیا ہے اور اس کو گور کے کسی نقطہ سے لٹکادیا گیا۔ اگر مخروط کے محور کا میلان انتصابی سمت کے ساتھ ہو تو ثابت کرو کہ

۱۲۔ مائع کی کچھ کثیت ایک مرکزی جاذب قوت (پچے) کے زیر عمل ایک مستوی پر ساکن ہے قوت کا مرکز مستوی سے ج فاصلہ پر اس طرف واقع ہے جس طرف مائع نہیں ہے۔ مائع کی آواز کوئی سطح کا نصف قطر ہے۔ ثابت کرو کہ مستوی پر دباؤ

$$= \frac{2}{3} \pi r^2 \rho (1 - \cos \theta)$$

۱۳۔ ایک متجانس مائع دو قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے جو ایسے بدلتی ہیں جیسے دو ثابت نقطوں سے فاصلوں کے سکوس مربیعے مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرو۔

اگر صفر دباؤ کی سطح ایک کرہ ہو تو ثابت کرو کہ ایسے نقطوں کے طریق میں جن پر کا دباؤ قوت کے ایک مرکز سے فاصلہ کے بالکل متناسب ہے کرے ہیں۔

آزاد سطح کا تعین ہو سکتا ہے لیکن یہ یاد رہے کہ ہمیشہ آزاد سطح کا موجود ہونا ممکن نہیں واصل آزاد سطح کے وجود کے لئے ضروری ہے کہ مساوی دباؤ کی سطحیں گردش کے محور کے لحاظ سے متساوی ہوں۔

امثلہ

۱۔ ایک بندنی جہاز قص کی شکل میں ہے اور جس کا محور اعظم انتصابی ہے تین مختلف انگوں سے جن کی کثافتیں ρ_1 ، ρ_2 ، ρ_3 ہیں بھری گئی ہے۔ اگر سطح فاصلے کے کسی ایک ماسک سے علی الترتیب ρ_1 ، ρ_2 ، ρ_3 ہوں تو ثابت کرو کہ

$$\rho_1(\rho_2 - \rho_3) + \rho_2(\rho_3 - \rho_1) + \rho_3(\rho_1 - \rho_2) = 0$$

۲۔ ایک ساکن متجانس مائع کی دی ہوئی کثیت کے ذرات قانون قدرت کے بموجب ایک دوسرے کو جذب کرتے ہیں کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرو۔

۳۔ ایک مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے آزاد سطح کے نیچے گہرائی کا مربع۔ (۱) مستطیلی رقبہ پر دباؤ معلوم کرو جو انتصاباً عین ڈوبا ہوا ہے اور جس کا ایک ضلع سطح میں ہے (۲) دائری رقبہ پر کا دباؤ معلوم کرو جو مائع میں عین ڈوبا ہوا ہے۔

۴۔ مکائی رقبہ کو جو در خاص سے محدود ہے ایک مائع میں انتصاباً عین ڈوبا گیا ہے اس کا راس مائع کی سطح میں ہے۔ اس پر دباؤ معلوم کرو (۱) جبکہ مائع متجانس ہو (۲) جبکہ مائع کی کثافت ایسی بدلے جیسے گہرائی۔

۵۔ مساوی دباؤ کی سطحیں دریافت کرو جبکہ قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف مائل ہوں اور ایسے بدلتی ہوں جیسے ان مرکزوں سے فاصلے۔

۶۔ ایک منظم چار سطحی (ذو اربعہ اسطوح) کو مائع سے بھر دیا گیا ہے اور اس طرح تھاما گیا ہے کہ ان کے دو مقابل کے کنارے افقی ہیں۔ اس کے مختلف پہلوؤں پر کے دباؤ کا مائع کے وزن کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۷۔ اگر نقطہ لا، م، ی پر نی ا کا کئی کثیت محوروں کے متوازی قوتیں

$$M_1(1 - \rho_1) + M_2(1 - \rho_2) + M_3(1 - \rho_3) = 0$$

عمل کریں تو ثابت کرو کہ مساوی دباؤ کی سطحیں نامندی مکائی نما ہیں اور مساوی دباؤ اور کثافت

کے گرو گھومتا ہے

اوپر کی طرح

فرد = ث { لا فرلا + ما فرما } - ج فرمی {

اور = ث

: م نوک ث = سہ $\frac{۲}{۲} \frac{لا + ما}{۲}$ - ج ی + ہر

اس طرح مساوی دباؤ کی سطحیں درساوی کثافت کی سطحیں بنائی گئیں۔

فرض کرو کہ برتن اسطوانہ ہے جو اپنے محور کے گرو گھوم رہا ہے اور نیز سیال کی کل کمیت دی ہوئی ہے مستقل سطح پر کرنے کے لئے سیال کو عنصری افقی حلقوں میں (ہر ایک کی کثافت یکساں) ترتیب دیا ہو خیال کرو۔ اور فرض کرو کہ اونچائی ی ہر ایک حلقہ کا نصف قطر ہے اور افقی موٹائی مفع ر، انتہائی موٹائی مفع ی ہے، اور اسطوانہ کا نصف قطر اور ارتفاع ف ہے تو

حلقہ کی کمیت = πr^2 ث ر مفع ر مفع یاوپر سیال کی کل کمیت (ک) = πr^2 ث ر فر فرمی

جہاں مبداء کو اسطوانہ کے قاعدہ میں لیا گیا ہے

اب $\frac{م}{م} = \frac{سہ}{سہ} \frac{۲}{۲} \frac{لا + ما}{۲}$ - ج یاور : ک = $\frac{۲}{۲} \frac{لا + ما}{۲} \frac{م}{م} (1 - \frac{سہ}{۲}) (1 - \frac{ج}{۲})$

اس مساوات سے ہر معلوم ہو جاتا ہے

۳۲۔ اگر سال یکساں رفتار سے گھوم رہا ہو اور کسی قسم کی قوتوں کے زیر عمل ہو تو توازن کی مساوات عام ہوگی

(۳۵)

فرد = ث { لا فرلا + ما فرما } - ج فرمی + سہ { لا فرلا + ما فرما }

توازن کے امکان کے لئے شرط کی تین مساواتیں پوری ہونی چاہئیں جن سے فرد کا پورا انکلی ہونا ظاہر ہو اور اگر یہ شرطیں پوری ہوں تو مساوی دباؤ کی سطحوں اور بعض صورتوں میں

کیونکہ اضافی توازن کی ایسی صورتوں میں سیال کا ہر ذرہ ایک دائرہ میں یکساں رفتار سے حرکت کرے گا اور سیال کے کسی ذرہ کے پر عمل کرنیوالی بیرونی قوتوں اور اس پر کے سیالی دباؤ کا حاصل قوت ک سے ذرہ کے مساوی ہوتا ہے جو محور کی طرف عمل کرتی ہے جہاں سے زاویہ رفتار اور ر اور محور سے ذرہ کا فاصلہ ہے۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ بیرونی قوتوں کو اگر سیالی دباؤ اور محور سے عمل کرنیوالی قوتوں ک سے ذرہ کے ساتھ ترکیب دیا جائے تو ہمیں سکونی توازن کا ایک نظام ملے گا جس پر ذرات گردش کی مساواتیں استعمال ہو سکتی ہیں۔

متجانسائع کی کچھ کمیت ایک برتن میں یکساں رفتار سے ایک انتصابی محور کے گرد گھوم رہی ہے۔ کسی نقطہ پر کا دباؤ اور مساوی دباؤ کی سطحیں معلوم کرنا مطلوب ہے۔

انتصابی محور کو محور ہی فرض کرو۔ قوت ک سے ر کو محوروں کے متوازی تحلیل کرنے سے اس کے اجزائے تحلیل ک سے لا اور ک سے ما حاصل ہوتے ہیں اور سیالی توازن کی مساوات عام ہو جاتی ہے۔

(۲۲)

$$\text{فرد} = \text{ث} (\text{سہ}^2 \text{لا} + \text{سہ}^2 \text{ما} - \text{ج فری})$$

اور اس لئے

$$\text{د} = \text{ث} \left\{ \frac{1}{4} \text{سہ}^2 (\text{لا} + \text{ما}) - \text{ج ی} \right\} + \text{ہر}$$

اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں گردش کی مکانی مناہیں اور اگر برتن کے اوپر کا سر اٹھایا ہو اور توازن سطح مساوات

$$\text{سہ}^2 (\text{لا} + \text{ما}) - ۲ \text{ج ی} + \frac{\text{ہر}}{\text{ث}} = \frac{\text{ث}^2}{\text{ث}}$$

سے حاصل ہوتی ہے جہاں ۲ بیرونی دباؤ ہے۔ مستقل کا تعین ہر خاص صورت میں مفروضہ چیزوں کی مدد سے کیا جاسکتا ہے۔

مثلاً اگر برتن کا سر بند ہو اور رائے سے اس کو بھر دیا جائے اور ۲ = ۰۔ تو محور کے بلند ترین نقطہ کو مبدأ قرار دینے سے د = ۰ جبکہ لا، ما، ی صفر ہوں اور اس لئے ہر = ۰۔ اور

$$\text{د} = \text{ث} \left\{ \frac{1}{4} \text{سہ}^2 (\text{لا} + \text{ما}) - \text{ج ی} \right\}$$

۳۱۔ اب ایک ایسے چکر اور سیال کی صورت پر غور کرو جیسے برتن میں بند ہے جو ایک انتصابی محور

(۲۳) اس نتیجہ کو $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$ لٹ کی شکل میں رکھا جاسکتا ہے۔ یہ جملہ ایسی کشش کو ظاہر کرتا ہے جو مائع کی کل کمیت پر جبکہ وہ مرکز ثقل پر ایک مادی ذرہ میں مکثف ہو جائے عمل کرتی ہے اور درحقیقت یہ جملہ یہ فرض کر کے بھی فوراً حاصل کیا جاسکتا ہے کہ یہ مائع قوت کے مرکز پر کی کشش اور ستوی کے تعامل کی وجہ سے ساکن ہے

(۳) ایک وزن دار مائع کا دیا ہوا حجم ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ۔

ثابت نقطہ کو مبدأ قرار دو اور y کو انتصابی سمت میں نیچے کی طرف ناپو۔ تو

$$\Delta = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho g x^2 \right) = -\rho g x$$

∴ فرد = ث - { مہ لا فلا - مہ ما فرما - (ج - مہ ی) فری }

$$\text{اور } \frac{d}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho g x^2 \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho g x^2 \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} \rho g x^2 \right)$$

مساوی دباؤ کی سطحیں کرے ہیں۔ اور آزاد سطح بیرونی دباؤ کو صفر فرض کر کے مساوات

$$\frac{1}{2} \rho g x^2 = \frac{1}{2} \rho g x^2 - \frac{1}{2} \rho g x^2 = \frac{1}{2} \rho g x^2$$

سے حاصل ہوتی ہے۔

$$\text{اس کو } \frac{1}{2} \rho g x^2 = \frac{1}{2} \rho g x^2 + \frac{1}{2} \rho g x^2$$

اس کو دئے ہوئے حجم کے مساوی رکھنے سے مستقل ہر معلوم ہو جاتا ہے اور پھر کسی نقطہ پر کا دباؤ y کی رتوجیم حاصل کیا جاسکتا ہے۔

گھومنے والا سیال

۳۔ اگر سیال کی کچھ مقدار یکساں رفتار سے اور اپنے ذروں کے اضافی مقامات کی تبدیلی کے بغیر (یعنی استوائیہ کی طرح) ایک ثابت محور کے گرد گھومے تو گذشتہ مساواتوں کے ذریعہ ہم کسی نقطہ پر کا دباؤ اور مساوی دباؤ کی سطحوں کی نوعیت معلوم کر سکتے ہیں۔

کے زیر عمل ساکن ہے تو

$$\text{فرو} = \text{ث} - \left(\frac{1}{14} \text{فرا} - \frac{1}{2} \text{ب} - \frac{1}{4} \text{ج} \right) \text{فری}$$

$$\text{اور } \text{د} = \text{مر} - \frac{\text{ث}}{2} \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \text{ج}$$

اس لئے مساوی دیاؤ کی سطحیں متشابہ ناقص نہ ہوں اور آزاد سطح کی مساوات جبکہ بیرونی دباؤ موجود نہ ہو

$$\frac{1}{14} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{\text{مر}}{\text{ث}} - \text{ہے}$$

اب جس شرط سے مستقل معلوم ہوتا ہے وہ ہے کہ مانع کا حجم دیا گیا ہے اور

$$\text{ح} = \frac{\pi}{4} \text{ا ب ج} \left(\frac{\text{مر}}{\text{ث}} \right)$$

$$\text{اس لئے } \text{مر} = \frac{\text{ث}}{2} \left(\frac{\text{ح}^3}{\text{ا ب ج}^2} \right)$$

(۲) ایک ثابت مستوی پر مانع کا دیا ہوا حجم ایک ایسی قوت کے زیر عمل ساکن ہے جو مستوی کے ایک ثابت نقطہ کی طرف عمل کرتی ہے اور ایسے بدلتی ہے جیسے اس نقطہ سے فاصلہ۔

ثابت نقطہ کو میدان قرار دیکر کسی نقطہ پر دباؤ معلوم کرنے کے لئے جملہ

$$\text{د} = \text{مر} - \frac{\text{ث}}{2} \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \text{ج} = \frac{\text{ث}}{2} \text{ا ب ج} \left(\frac{\text{مر}}{\text{ث}} \right) \text{حال ہوتا ہے}$$

جہاں ر میدان سے فاصلہ ہے۔ اور اگر $\frac{\pi}{4}$ دیا ہوا حجم ہو تو آزاد سطح نصف قطر لا والا نصف کرہ ہے۔ اور

$$\text{د} = \frac{\text{ث}}{2} \left(\frac{1}{14} - \frac{1}{2} \right) \text{ا}$$

مستوی کا وہ حصہ جسکو مانع مس کرتا ہے ایک دائرہ ہے جس کا نصف قطر ا ہے اور اس لئے

$$\text{اس پر کا دباؤ} = \text{کر} \cdot \text{کر} \cdot \text{د} \cdot \text{ر} \cdot \text{ر} \cdot \text{ر} \cdot \text{ر}$$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ا} \text{مر} \text{ث} \text{ا}$$

حل کو پورا کرنے کے لئے پورے چھوں کو مساوی رکھنا چاہیئے جس سے ہیں $\text{ف}^2 = \text{ج} \text{ ف}$ حاصل ہوتا ہے جو ف اور ج میں مطلوبہ ربط ہے۔

۲۸ — جاذبہ ارض کے زیر عمل لچکدار سیال کا سکون۔

اس صورت میں $\text{د} = \text{م} \text{ ث}$

$$\text{اور } \frac{\text{ف}^2}{\text{د}} = \frac{\text{ج}}{\text{م}} \text{ فری}$$

$$\text{نہ لوک } \frac{\text{ج}}{\text{م}} = \frac{\text{ج ی}}{\text{م}} \text{ اور } \text{د} = \text{ج} \text{ موم}$$

یہاں بھی مساوی دباؤ کی سطحیں افقی مستوی ہیں اور مستقل ج کا تعین ی کی کی دی ہوئی قیمت کے لئے دباؤ کے لئے دباؤ کے معلوم ہونے سے ہو سکتا ہے۔ یا اس صورت سے متعلق کسی دئے ہوئے واقعہ کے معلوم ہونے سے۔
مثال :- ایک بند اسطوانہ میں جسکا محور انتصابی ہے ہوا کی دی ہوئی کیت ہے۔
اسطوانہ کے سر سے ی کو نا پنے سے

$$\text{ث} = \frac{\text{د}}{\text{م}} = \frac{\text{ج}}{\text{م}} \frac{\text{ج ی}}{\text{م}}$$

نہ اگر دی ہوئی کیت ، نصف قطر، ف اسطوانہ کا ارتفاع ہو تو

$$\text{ک} = \text{ث} \text{ ر}^2 = \text{ا}^2 \text{ فری} = \text{ا}^2 \frac{\text{ج}}{\text{م}} \text{ (و) } \text{ (ا)} -$$

جس سے ج معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۹ — مساوات عامہ کے استعمال کی مثالیں۔

(۱) فرض کرو کہ مانع کا دیا ہوا حجم ح محوروں کے متوازی قوتوں

$$- \frac{\text{مہ لا}}{\text{ا}} - \frac{\text{مہ با}}{\text{ب}} - \frac{\text{مہ ی}}{\text{ج}}$$

کثافت چونکہ (گ - لا) کا اور نیز (گ - لا) کا دیا ہوا تفاعل ہے ہم ان دونوں جملوں کو مساوی رکھ کر لا کو لا کی رقوم میں معلوم کر سکتے ہیں -
 نیز متناسطیوں کے جملوں کو مساوی رکھنے سے ہم ما فر لا = ما فر لا حاصل کرتے ہیں جس میں لا کی قیمت لا کی رقوم میں مندرج کر کے ہم مطلوبہ مساوات معلوم کر سکتے ہیں۔ اور پھر پورے جملوں کو ایک دوسرے کے مساوی رکھ کر گ کی قیمت معلوم کرتے ہیں -
 مثال ۱ - ایک اسطوانی برتن میں مائع کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی عمالوں کی کثافت معلوم کرہ اگر مائع کو ایک مخروطی برتن میں ڈالا جائے جسکا راس نیچے کی طرف ہو۔
 اس صورت میں

$$\text{ث} = \text{مہ} (\text{گ} - \text{لا})$$

$$\text{اور } ۲ \text{ لا} = \frac{۱}{۳} \text{ لا} \text{ مس} \text{ عہ}$$

$$\text{نیز } ۲ \text{ لا} = \frac{۱}{۳} \text{ لا} \text{ گ مس} \text{ عہ}$$

$$\therefore \text{ث} = \text{مہ} \text{ لا} = \frac{\text{لا}^3}{۳} = \frac{\text{مہ} (\text{گ} - \text{لا})^3}{۳} (\text{گ} - \text{لا})$$

اگر گہرائی می ہو۔
 مثال ۲ - مائع کی کچھ مقدار جس کی کثافت ایسے بدلتی ہے جیسے گہرائی ایک اوئندے یا لٹے مکانی نمایں دی ہوئی بلند می تک بہری ہوئی ہے ایک ایسے برتن کی شکل معلوم کرنا، (جو گردش سطح کی شکل میں ہو) کہ اگر اس مائع کو اس میں ڈالا جائے تو کثافت ایسے بدلے جیسے گہرائی کا مربع۔

اس صورت میں ث = مساف - لا = مہ (ف - لا) جہاں ف گہرائیاں ہیں۔

$$\therefore \text{لا} = \text{ف} - \frac{۱}{۳} (\text{ف} - \text{لا}) \quad \text{اگر مہ} = \text{مہ ج}$$

$$\text{مساوات } ۲ \text{ لا فر لا} = \text{ما فر لا سے}$$

$$\text{ج} \text{ ما} = ۸ (\text{ف} - \text{لا}) \{ \text{فج} - (\text{ف} - \text{لا}) \}$$

حاصل ہوتا ہے۔

$$n + \text{ج} \text{ ٹی} + n$$

ہونگے اس لئے

$$\frac{y}{x} = \frac{\text{ٹ}}{\text{ج}}$$

۲۷۔ یہ ایک مشہور قانون ہے کہ اگر جاذبہ ارض اور چکنی سطحوں کے دباؤ کے زیر عمل کوئی نظام متوازن ہو تو توازن قائم ہوتا ہے بشرطیکہ مرکز ثقل پچھلے سے پچھلے مکن مقام میں واقع ہو۔ جس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ غیر متجانس مائع کی صورت میں گہرائی کے ساتھ کثافت کو بڑھانا چاہیئے کیونکہ یہ صورت دیگر توازن غیر قائم ہوگا۔

اس طرح اگر ایک غیر متجانس مائع کو ایک برتن سے دوسرے برتن میں ڈالا جائے تو ہر برتن میں یہ نتیجہ بیٹھ جائے گی اور قانون کثافت یقیناً بدلتا ہوگا۔

مائع کی کچھ مقدار جس کی کثافت گہرائی کا ایک دیا ہوا تفاعل ہے دئے ہوئے برتن میں ہے۔ اگر اس مائع کو دوسرے برتن میں منتقل کیا جائے تو نئے قانون کثافت کا معلوم کرنا مطلوب ہے۔ جب کہ ہر برتن ایک گردش سطح کی شکل میں ہو جس کا محور اتصالی ہے۔

لاگو واقع کے زیر ترین نقطہ سے اوپر کی طرف ناپ کر فرض کرو کہ $a = f (a)$ پہلے برتن کا گہرائی مٹنی ہے اور $a = f (a)$ دوسرے برتن کا۔

پس اگر پہلے برتن میں لابلندی والی تہ دوسرے برتن میں لابلندی والی تہ کے متناظر ہو تو چونکہ حجم سادی ہیں اسلئے ہیں حاصل ہوگا

$$f(a) (a) = f(a) (a) = f(a) (a)$$

اب عمل مکمل سے لاگو لاکر روم میں حاصل کر سکتے ہیں۔ اور اسلئے $f(a)$ جو لا کا تفاعل ہے، لا کا نیا تفاعل بن جاتا ہے۔

خیر اگر ان دو برتنوں میں مائع کی گہرائیاں گ، گ ہوں تو گ کو گ کی روم میں معلوم کر سکتے ہیں اور اس لئے کثافت $f(a)$ گہرائی گ۔ لاکر روم میں معلوم ہو سکتی ہے اگر نیا قانون کثافت دیا جائے اور نئے برتن کی شکل معلوم کرنا مطلوب ہو تو ہم اس طرح عمل کرتے ہیں۔

$$\text{لا} = \text{ما} = \text{ے} = \text{ج}$$

اور دفعہ (۱۵) کی مساوات (ع) ہو جاتی ہے

$$\text{فرد} = \text{ج} \text{ ث فری}$$

جسکو ایک انتصابی چھوٹے اسطوانے کے توازن پر غور کرنے سے بھی بلا واسطہ حاصل کر سکتے ہیں۔

متجانس سیال کی صورت میں

$$\text{د} = \text{ج} \text{ ث ی} + \text{ہر}$$

اور مساوی دباؤ کی سطحیں افقی مستوی ہیں۔

اس لئے آزاد سطح افقی مستوی ہے اور اس لئے مباد کو آزاد سطح میں اور ہ کو بیرونی دباؤ قرار دینے سے

$$\text{د} = \text{ج} \text{ ث ی} + \text{ہ}$$

اگر آزاد سطح پر کوئی دباؤ نہ ہو تو

$$\text{د} = \text{ج} \text{ ث ی}$$

یعنی کسی نقطہ پر کا دباؤ آزاد سطح کے نیچے اس نقطہ کی گہرائی کے متناسب ہوگا۔

غیر متجانس سیال کی صورت میں مساوات

$$\text{فرد} = \text{ج} \text{ ث فری}$$

سے ظاہر ہے کہ ث کو ی کا تغافل ہونا چاہیئے۔ اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک ہی افقی سطح کے تمام نقطوں پر کثافت اور دباؤ مستقل ہوتے ہیں۔

مثال کے طور پر فرض کر کہ $\text{ث} = \text{ی} = \text{مہ}$ $\text{ی} = \text{ن}$

$$\text{تو} \quad \text{د} = \text{ج} \text{ مہ} + \frac{\text{ی} \text{ ن}}{1 + \text{ن}}$$

۲۶۔ دو مائع جو باہم آمیز نہیں ہوتے ایک خمدار نلی میں ڈالے گئے ہیں ثابت کر دو کہ انکی مشترک سطح سے آزاد سطحوں کے ارتفاع کثافتوں کے بالعکس متناسب ہوتے ہیں۔

مشترک سطح پر دباؤ وہی ہیں اور اگر مشترک سطح سے آزاد سطحوں کے ارتفاع ی ، ی ہوں اور کثافات کی کثافتیں ث ، ث ہوں تو یہ دباؤ علی الترتیب

(۱۹)

کیونکہ اس عنصر کی سطح پر کے سیالی دباؤ تمام کے تمام مرکز کی سمت میں عمل کرتے ہیں اور اسلئے عمل کرنے والی قوتوں کا معیار مرکز کے گرد معدوم ہونا چاہیئے۔
فرض کرو کہ مرکز کے محدود لاء، ما، ی اور اس کے چھوٹے کرہ کے اندر کسی نقطہ کے محدود لاء، ع، ب، ی + جہ ہیں۔

اب چونکہ مرکز پر کی کثافت ث ہے اسلئے جلد ۳ فرم (ے ب۔ ما جہ) ہو جاتا ہے

$$\left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف ما}} + \frac{\text{جف ث}}{\text{جف ی}} \right\} (ب) (ے) + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}}$$

$$+ \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} - (ج) (ما) + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}} \}$$

اب $\left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\} = ۰$ ، کیونکہ کرہ کا مرکز حجم کا مرکز ثقل ہے
 اسی طرح $\left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\} = ۰$ ، وغیرہ، اور اگر فرتہ = فرم فرم فرم،

$$\text{تو } \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\} = \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\} = \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\}$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\}$$

اس طرح اگر ع، ب، جہ کی اعلیٰ قوتوں کو نظر انداز کر دیا جائے تو معیار کا جلد ہو جائیگا

$$\left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\} - \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\} = \left\{ \frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}} \right\}$$

اور چونکہ یہ صفر ہو جاتا ہے اس لئے

$$\frac{\text{جف مے}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف مے}}{\text{جف ی}}$$

۲۵۔ جاذبہ ارض کے زیر عمل ساکن سیال۔
محوری کو انتہائی بیکری نیچے کی طرف ناپنے سے

ہم نے شکل (۲) کی میعادوں والی مساواتوں کو ابھی تک استعمال نہیں کیا لیکن ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ وہ بھی مساواتوں (۵) سے پوری ہوتی ہیں۔ مثلاً

$$\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{ac}{bd} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

پر غور کرو۔ اگر ہم اسی مشورہ پر پہلے کی طرح مکمل کریں اور اس کا خیال رکھیں کہ مشورہ پر مستقل ہے تو ہمیں حدود (ن) اور (ن) اور (ن) وغیرہ کے درمیان تکمیل کرنے سے حاصل ہوگا

$$\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{ac}{bd} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

اور اوپر کی طرح یہ $\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{ac}{bd}$ کے مساوی ہے جس میں پوری سطح پر مکمل لیا گیا ہے۔ یعنی مساوات (۴) اس حالت میں بھی درست رہتی ہے جبکہ ہم تکمیل میں (یا ی) جزو فری کے طور پر مساوات کی طرفین میں شامل کر دیں۔ اسی طرح کے استدلال سے حاصل ہوتا ہے کہ

$$\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{ac}{bd} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

اور مساوات (۵) سے اندراج کرنے سے یہ ہو جاتا ہے

$$\left(\frac{a}{b} \right) \left(\frac{c}{d} \right) = \frac{ac}{bd} \quad \text{فرلا فرما فری}$$

اس طرح (۲) کی تصدیق ہوتی ہے۔

یہ یاد رہے کہ چونکہ سیال کامل قرضی یا جذبی زور کی مزاحمت کے ناقابل ہوتا ہے اسلئے اس قسم کے زور متوازن سیال کی کمیست کے اندر نہیں پائے جاسکتے۔ اس لئے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ محوروں کے گرد معیار لینے سے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں وہ لازماً پوری ہونی چاہئیں جبکہ محوروں کے متوازی قوتوں کو تحصیل کرنے سے حاصل شدہ مساواتیں پوری ہوں۔ کیونکہ توازن کی صورت میں موخر الذکر مساواتیں سیال کے کسی محدود یا صغیر جز کے لئے درست ہوتی ہیں اور قوتوں کے اسی توازن سے لازم آتا ہے کہ میعادوں کی مساواتیں بھی درست ہوں۔

۲۴۔ سیال کے کردی عنصر کے توازن پر غور کرنے سے ہم یہ بھی ثابت کر سکتے ہیں کہ

بث (لا فرلا + ما فرما + مے فری) کو پورا تفرقہ ہونا چاہیئے۔

لیکن اگر طہ، طہ، طہ..... نقاط 'ن'، 'ن'، 'ن'..... کے باہر دار عمادوں کے میلان محور لا کے ساتھ ہوں تو

$$\text{فرامری} = - \text{فرس} \text{ جم طہ} = \text{فرس} \text{ جم طہ} = - \text{فرس} \text{ جم طہ} = \dots$$

$$= - \text{ل فرس} = \text{ل فرس} = - \text{ل فرس} = \dots$$

علامت منفی یا مثبت ہوگی بوجب اس کے کہ زاویہ منفی جہ یا حادہ ہو یعنی بوجب اس کے کہ منشور میدان تکمل میں داخل یا اس سے خارج ہو رہا ہو۔
اس لئے (۳) میں حدود پر کی قیمتیں رکھنے سے

$$\text{لا جف د} \text{ لا جف لا} \text{ فرلا فرامری} = \text{لا (د ل فرس)} + \text{د ل فرس} + \text{د ل فرس} + \text{د ل فرس} + \dots$$

$$= \text{لا ل د فرس} \text{ پوری سطح پر} \dots \dots \dots (۴)$$

اس قیمت کو (۱) میں استعمال کرنے سے مساوات

$$\text{لا (جف د - ث لا)} \text{ فرلا فرامری} =$$

حاصل ہوتی ہے اور نیز اسی طرح کی دو اور مساواتیں حاصل ہوتی ہیں اور چونکہ یہ تینکے سیال میں شکل کی تمام دستوں یعنی تمام بند سطحوں کے لئے معدوم ہوتے ہیں اس لئے ہر نقطہ پر ان کے شکل صفر ہونے چاہئیں اس لئے

$$\text{جف د} = \text{ث لا} \text{، جف د} = \text{ث ما} \text{، جف د} = \text{ث ع} \dots (۵)$$

جس سے پہلے کی طرح

$$\text{فرد} = \text{ث (لا فرلا + ما فرما + ع فری)}$$

کس طرح دباؤ کی اساسی مساوات حاصل کی جاتی ہے۔
فرض کرو کہ سیال میں ایک بند سطح سے ٹھیکھی گئی ہے۔ اور اس کے کسی نقطہ پر بیرونی عماد کے سمیٹی جیوب التمام M ، N ہیں۔ سطح MN کے اندر جو سیال ہے اس کی کیت کے توازن کی شرطوں کو اختصاصاً دایوں بیان کر سکتے ہیں کہ حدود پر کے عمادی دباؤ کیت پر عمل کرنیوالی قوتوں کا توازن کرتے ہیں۔ اس طرح محور کے متوازی تحلیل کرنے سے ہمیں شکل ذیل کی تین مساواتیں ملتی ہیں۔

فرد = . ، فرٹ = .

یعنی لا فرلا + ما فرما + مے فری = .

$$\frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \text{فری} \dots\dots\dots (ب)$$

اس لئے یہ ایسی سطحوں کی تفرقی مساواتیں ہیں جو اپنے باہمی تقاطع سے مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے منحنیوں کا تعین کرتی ہیں۔

(ب) سے ہمیں ماہل ہوگا۔

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{جفٹ لا}}$$

$$\frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} - \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} - \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} - \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}}$$

..... (ج)

لیکن شرائط توازن سے

$$\frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}}$$

$$\frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}}$$

$$\frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} + \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}}$$

اور اس لئے مساواتیں (ج) ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{فری}}{\text{جفٹ لا}}$$

$$\frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} - \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} - \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} = \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}} - \frac{\text{جفٹ لا}}{\text{جفٹ لا}}$$

..... (د)

جو مساوی دباؤ اور مساوی کثافت کے منحنیوں کی تفرقی مساواتیں ہیں۔

۲۳ — اب ہم ایک محدود کثافت کے سیال کے توازن پر غور کرنے سے یہ بتائیں گے کہ

کیونکہ فرد = ث فرقہ اور فرد پورا فرقہ ہے۔ اسلئے ث کو قوہ ذ کا تفاعل ہونا چاہیئے۔ اس طرح ذ اور اس لئے ث د کے تفاعل ہیں اور مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی قوہ کی سطحیں بھی ہیں اور مساوی کثافت کی سطحیں بھی۔
اگر سیال یکساں ہو اور ہمیشہ متغیر قوہ

$$\frac{فرد}{ث} = \frac{فرد}{ث}$$

اس طرح، اسی قسم کے عمل استدلال سے، ت، د کا تفاعل ہے اور مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کشش کی سطحیں بھی ہیں۔
لیکن اگر فلا + ما فرما + مے فری پورا فرقہ نہ ہو تو یہ سطحیں عام طور پر منطبق نہ ہوں گی۔
فرض کرو کہ سیال غیر متجانس اور بے پیمائش ہے تو مساوی دباؤ کی اور مساوی کثافت کی سطحیں حسب ذیل مساواتوں سے حاصل ہوتی ہیں

(۱۶)

۱۶ یہ نتیجہ طریقہ ذیل سے بھی مستنبط ہو سکتے ہیں۔

قریب کی دو مساوی دباؤ کی سطحوں پر غور کرو۔ جن کے درمیان سیال کی ایک تہ ہے اور فرض کرو کہ ایک سطح کے نقطہ ن کے گرا ایک چھوٹا دائرہ بنایا گیا ہے اور اس کے محیط میں سے گزرنے والے عمادوں سے سیال کا کچھ حصہ علیحدہ کر لیا گیا ہے۔ سیال کا یہ حصہ قوت عالمک ان کے سروں اور محیط پر کے دباؤ کے زیر عمل ساکن ہے اب چونکہ تقریباً یہ بہت چھوٹا اسطوانہ ہے اور اس کے محیط پر کے تمام نقطوں پر دباؤ مساوی ہیں۔ اس لئے دونوں رخوں پر کے دباؤں کا فرق نوسٹ عالمک کی وجہ سے پیدا ہونا چاہیئے جو اس لئے اُس سمت میں عمل کرتی ہے جس سمت میں کہ یہ دباؤ عمل کرتے ہیں یعنی نقطہ ن پر کے عماد کی سمت میں۔

اگر قوتیں ایک قوہ سے حاصل ہو سکیں تو حاصل قوت ہم قوہ سطحوں کے علی التوا اُٹھ ہوگی اور اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں ہم قوہ سطحوں پر منطبق ہوں گی۔

پھر اس عنصری اسطوانہ کے توازن پر غور کرنے سے عمل کرنیوالی قوت فی اکائی کثافت مساوی دباؤ کی سطحوں کے درمیان مستقل اور چونکہ اس عنصر کی کثافت بالزست اس فاصلہ کے متناسب ہے اس لئے کثافت مستقل ہونی چاہیئے یعنی مساوی دباؤ کی سطحیں مساوی کثافت کی سطحیں بھی ہوتی ہیں۔

$$د = ف (لا، ما، ی)$$

اگر مستقل ہو تو $ف (لا، ما، ی) = د$ (۱)
جو ایسی سطح کی مساوات ہے جس کے تمام نقطوں پر دباؤ مستقل ہے اور جس میں دو مختلف
قیمتیں دیئے سے مساوی دباؤ کی سطحوں کا ایک سلسلہ ملتا ہے۔ نیز د کو سیال کے بیرونی
دباؤ کے مساوی رکھنے سے بیرونی سطح یا آزاد سطح حاصل ہوتی ہے۔
اگر بیرونی دباؤ صفر ہو تو آزاد سطح ہوگی
 $ف (لا، ما، ی) = -$

مقادیر

جف ف ، جف د ، جف لا
جف لا ، جف ا ، جف ی
جسطح (۱) کے نقطہ (لا، ما، ی) پر کے عماد کی سمتی جیوب الٹام کے تناسب ہیں با ترتیب
جف د ، جف د ، جف د
جف لا ، جف ما ، جف ی
کے مساوی ہیں یعنی ث لا ، ث ما ، ث ی کے مساوی ہیں اور اس لئے
لا، ما، ی کے متناسب ہیں۔

(۱۵) اس لئے کسی نقطہ پر کی حامل قوت اس عماد کی سمت میں عمل کرتی ہے جو اس نقطہ میں
سے گزرنے والی مساوی دباؤ کی سطح پر اس نقطہ میں سے کھینچا گیا ہے۔
اس لئے مساوی دباؤ کی سطحیں وہ ہیں جو قوت کے خطوط کو علی التوائم قطع کرتی ہیں۔
اس نتیجہ سے یہ مستنبط ہوتا ہے کہ توازن کے لئے ضروری شرائط ایسی سطحوں کے نظام کا
وجود ہے جو خطوط قوت کو علی التوائم قطع کرتی ہیں۔ یہ نتیجہ ذنعد (۱۶) کی مساوات (ج) سے
بھی حاصل ہو سکتا ہے کیونکہ ہم جانتے ہیں کہ اس قسم کے نظام کے وجود کے لئے مساوات
ذکورہ ضروری تحلیلی شرط ہے۔

۲۲ اگر سیال متجانس مانع ہو یعنی اگر ث مستقل ہو تو لا فر لا + ما فر ما + ی فر ی پورا
تفرق ہونا چاہیے۔ یا الفاظ دیگر قوتوں کا نظام تعظیفی یا بقائی ہونا چاہیے۔
عام صورت میں اگر قوتوں کا نظام بقائی ہو تو ث کو لازماً قوہ ف کا تفاعل ہونا چاہیے

۱۴

$$(د + مع د) ع - د ع = ف ا ع س مع س$$

اور اس لئے انتہا لینے سے

$$فرد = س س فرس$$

یعنی کسی سمت میں دباؤ کے اضافہ کی شرح دو مقداروں کا حاصل ضرب ہے۔ ایک مقدار کثافت ہے اور دوسری مقدار قوت کا وہ جزو تحلیل ہے جو اس سمت میں عمل کرتا ہے۔ اگر نقطہ ن کے محدود لا، ما، ای اور س کے اجزائے تحلیل محوروں کی سمت میں لا، ما، ای ہوں تو

$$س = لا \frac{فرس}{فرس} + ما \frac{فرس}{فرس} + ای \frac{فرس}{فرس}$$

اور $ث = فرد + لا + فرس + ما + فرس + ای + فرس$ (بوجب دفعہ ۱۵) اگر نقطہ ن کا مقام استوائی محدودوں (ر، ط، ای) کے لحاظ سے دیا جائے اور اگر قوت س کے اجزائے تحلیل (ر، ط، ای) کی سمتوں میں ق، ت، ای ہوں تو

$$س = ق \frac{فرس}{فرس} + ت \frac{فرس}{فرس} + ای \frac{فرس}{فرس}$$

اور د کی مساوات ہو جاتی ہے

$$فرد = ث (ق فرد + ت ر فرد + ای فرس)$$

پہر اگر ن کا مقام قطبی محدودوں (ر، ط، ای) کے لحاظ سے دیا جائے اور قوت کے اجزائے تحلیل (س، ن، ت، ای) ہوں جو علی الترتیب ر کی سمت میں زاویہ ط، وائے مستوی کے عمود کی سمت میں اور اس مستوی میں ر پر کے عمود کی سمت میں تحلیل کئے گئے ہیں تو معلوم ہوگا کہ

$$\frac{فرد}{د} = س فرد + ن ر جب ط فرد + ت ر فرد$$

اسی طرح فرد کے لئے جگہ کسی اور محدودوں کے نظام میں معلوم ہو سکتا ہے۔
۲۱۔ مساوی دباؤ کی سطحیں۔ تمام صورتوں میں جن میں کہ سیال کا توازن ممکن ہوگی سے حاصل ہوگا

$$م \text{ فرد} = \frac{1}{2} (ر + ر)$$

اختیار کرتی ہے اور د کا تعین ہو سکتا ہے۔
اگر پیش متغیر ہو تو د باؤ تپش اور کثافت میں یہ ربط

$$د = م \text{ ث } (۱ + م \text{ ث})$$

ہوتا ہے جہاں تپش ت م تپش پیا سے ناپی گئی ہے اور $د = ۳۹۵ \times ۱۰۰$ اس سے ہیں حاصل ہوگا

$$د = م \text{ ث } = \left\{ \frac{1}{2} + ت \right\} = م \text{ ث } ت$$

جہاں $م = م$ ، اور $د = \frac{1}{2} + ت$ ، ت کو تپش مطلق کہتے ہیں
جس کا صفر ۲۰۳ مٹی پر ہوتا ہے۔

$$\text{اس صورت میں } \frac{د}{2} = \frac{لا \text{ فرا} + ما \text{ فرا} + م \text{ فری}}{م \text{ ث}}$$

اور اس لئے ت متقابل ہونا چاہیئے لا، ما، می کا۔

ان میں سے کسی صورت میں اگر کسی خاص نقطہ پر کا دباؤ دیا جائے تو مستقل دریافت ہو سکتا ہے۔

پیکدارسیالوں کی صورت میں اگر سیال کی کمیٹ اور وہ جگہ جس میں یہ محدود ہے معلوم ہوں تو مستقل معلوم ہو جاتا ہے۔

۲۰۔ د دریافت کرنے کی سادات طریقہ ذیل سے بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

فرض کرو کہ ن ق ایک بہت چھوٹے اسطوانہ کا محور ہے جو ن ق پر کے علی التواہم مستویوں سے گھرا ہوا ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ د + م د نقاط ن اور ق پر کے دباؤ ہیں۔ سطحی تراشش کا رقبہ ہے اور م م، ن ق کا طول ہے اب اگر سمت ن ق میں ذرہ م ک پر عمل کر نیوالی قوتوں کا جزو تخیلی م م م م ہو تو

اس لئے یہ ظاہر ہے کہ مساوات (ب) ہمیشہ پوری ہوتی ہے لیکن اس سے پیشتر ہمیں یہ نکالنا چاہیے کہ اگرچہ فی قانون کے زیر عمل غیر متجانس سیال کا توازن بھی ہمیشہ ممکن ہوتا ہے۔
 بسکائفت مستقل ہو تو یہ مساواتیں ہو جاتی ہیں

$$\frac{\text{جف} - \text{جف} + \text{جف}}{\text{جف} - \text{جف} + \text{جف}} = \frac{\text{جف} - \text{جف} + \text{جف}}{\text{جف} - \text{جف} + \text{جف}}$$

اور اسی لئے اس صورت میں ہمیشہ پوری ہوتی ہیں اس لئے اس قسم کی قوتوں کے زیر عمل ایک متجانس سیال کا توازن ہمیشہ ممکن ہے۔

۸۔ پھر متجانس سیال کے کاروں کو افق معلوم ہو یعنی اسٹاکرا، ای، ای کا دیا ہو، متغائل ہو تو (ب) مساواتیں وہ شرطیں ہیں جن کا پورا ہونا ضروری ہے تاکہ ای ہوتی قوتیں نکالنا ممکن ہو۔
 سیال کو توازن میں رکھ سکیں۔

۱۹۔ لچکدار سیال :- اگر سیال لچکدار ہو تو ایک اور شرط کا اضافہ ہو جائیگا کیونکہ
 د = م ٹ ، اگر پیشتر مستقل ہو

$$\frac{ف}{د} = \frac{م}{ف} \quad (لا فولا + ما فرما + سنے فری) \dots \dots \dots (ولا)$$

اگر قوتیں توہ سے حاصل ہو سکیں یعنی اگر

$$لا فولا + ما فرما + سنے فری$$

پورا فرقہ (- فرقہ) ہو تو

$$م = \frac{ف}{د} = فرقہ$$

$$\therefore م لوک = \frac{د}{ف} = ف \quad \text{جہاں ج مستقل ہے۔}$$

$$\text{یعنی } د = ج \times ف \quad \text{اور } م = \frac{ج}{ف} \times ف$$

جب قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف مائل ہوں اور فاصلوں کے تغائل ہوں (فونڈل) (توتیرہ مساواتیں یہ شکل

$$\frac{\text{فری}}{\text{سے}} = \frac{\text{فرما}}{\text{ما}} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$$

سطحوں کے ایک نظام سے علی التوأم قطع ہو سکتے ہیں۔

۱۷۔ متوازن ثلعات۔ اگر سیال متجانس اور بے پچک ہو تو لا فرلا + ما فرما + سے فری (۱۱۷)

پورے فرقہ ہونا چاہیئے تاکہ توازن ممکن ہو سکے۔
بالفاظ دیگر قوتوں کا نظام تحفظی یا بقائی ہونا چاہیئے اور قوتوں کی تعبیر قوتہ تفاعل کے
مکانی تغیرات سے ہونی چاہیئے۔

اگر نہ قوتہ تفاعل ہو تو

فرد = - ث فر

اس لئے $\frac{ث}{ف} + \frac{ف}{ث} = م$ (مستقل)

مثلاً اگر قوتیں ثابت مرکزوں کی طرف یا ان کے باہر وار عمل کر نیوالی ہوں اور وہ ان مرکزوں کے
فاصلوں کی تفاعل ہوں تو

$$\left\{ \frac{ف}{ث} (ر) \right\} = \left\{ \frac{ث}{ف} (ر) \right\} = م$$

جہاں (ا' ب' ج) اس مرکز کے محدود ہیں جہاں قوت ف (ر) مائل ہے۔

اب $ر = (لا - ا) + (ما - ب) + (می - ج)$

لا فرلا + ما فرما + سے فری = $\frac{ف}{ث} (ر)$ فرد

اور فرد = $\frac{ث}{ف} (ر)$ ث فر

اس صورت میں چونکہ

$$\left\{ \frac{ف}{ث} (ر) \right\} = \left\{ \frac{ث}{ف} (ر) \right\} = م$$

$$\left\{ \frac{ف}{ث} (ر) \right\} = \left\{ \frac{ث}{ف} (ر) \right\} = م$$

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}}$$

اس لئے گزشتہ مساواتوں سے ہمیں مندرجہ ذیل مساواتیں حاصل ہوتی ہیں۔

$$(ب) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} \\ \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} \\ \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} \end{array} \right.$$

جن سے

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}}$$

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}}$$

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}}$$

لا، ما، اے سے ضرب دیکر جمع کرنے سے

$$\frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}}$$

$$(ج) \dots\dots\dots = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}} = \frac{\text{جف}^{\text{ا}}\text{د}}{\text{جف}^{\text{ا}}\text{جف}^{\text{ی}}\text{ما}}$$

جو توازن کے لئے ضروری شرط ہے۔

اس مساوات کی اہم سی تعبیر یہ ہے کہ قوت کے خطوط

لاٹ عم مف لا سے وہ قوت تعمیر ہوگی جو ن ق پراسکے محور کے متوازی عمل کرتی ہے
جہاں لا مف ک، ما مف ک، سے مف ک سیال کے ذرہ مف ک پر جو (لا، ما، ی)
پر واقع ہے عمل کرنیوالی قوتوں کے اجزائے تحلیل ہیں۔
اس لئے ن ق کے توازن کے لئے

$$(د + مف د) عم - د عم = لاٹ عم مف لا$$

$$مف د = دٹ لا مف لا$$

انتہائی نیچے جیکہ مف لا اور اس لئے مف د لا انتہا کم کر دئے جائیں نقطہ ن پر مکی
کثافت ٹ ہوگی اور ہمیں حاصل ہوگا

$$\frac{جف د}{جف لا} = دٹ لا$$

$$\frac{جف د}{جف ما} = دٹ ما$$

$$\frac{جف د}{جف ی} = دٹ ی$$

$$لیکن فرد = \frac{جف د}{جف لا} فرلا + \frac{جف د}{جف ما} فرما + \frac{جف د}{جف ی} فری$$

$$\therefore فرد = دٹ (لا فرلا + ما فرما + ی فری) \dots\dots\dots (عم)$$

اس مساوات سے دباؤ معلوم ہو جاتا ہے۔

۱۶۔ صریحاً دباؤ متغیروں لا، ما، ی کا تفاعل ہے اور ہم جانتے ہیں کہ

لہ ثبوت بالا میں عم اس قدر چھوٹا لیا گیا ہے کہ اس کے خطی ابعاد بقابلہ مف لا کے نظر انداز کئے جاسکیں
یعنی لا کی تبدیلی مف لا کے جواب میں دباؤ د میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس پر ما، ی کے اس
جہ سے اثر نہیں پڑتا۔

باب دوم

سیالوں کے توازن کی شرطیں

۱۵۔ عام سے عام صورت میں فرض کرو کہ ایسے سیال کی کچھ کمیت جو بچک دار ہوا بے بچک منجائس ہوا یا غیر متجانس، دی ہوئی قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور فرض کرو کہ توازن کی شرطیں اور کسی نقطہ پر کا دباؤ معلوم کرنا مطلوب ہے۔

فرض کرو کہ سیال کے کسی نقطہ n کے محدود علی القوائم محوروں کے لحاظ سے لا، مائی ہیں۔ اور q اس کے نزدیک ایک ایسا نقطہ ہے کہ n ق محور la کے متوازی ہے فرض کرو کہ $la + م$ لا، مائی نقطہ q کے محدود ہیں۔ n ق کے گرد ایک چھوٹا منشور یا اسطوانہ بناؤ جو n ق پر کی علی القوائم مستویوں سے محدود ہو۔

فرض کرو کہ اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ ea نقطہ n پر کا دباؤ d اور نقطہ q پر کا دباؤ $d + م$ ہے۔

اب چونکہ بہت چھوٹا ہے، اس لئے مستوی n پر کے کسی نقطہ پر دباؤ تقریباً d کے مساوی ہوگا اور اس لئے اسپر کا دباؤ

$(d + م)$

ہوگا جہاں $م$ بمقابلہ d کے صفر ہو جاتا ہے جبکہ $م$ کو لا انتہا کم کیا جائے اس لئے کہ $م$ کو ہم اس قدر چھوٹا فرض کر سکتے ہیں کہ بمقابلہ d کے $م$ نظر انداز ہو سکے۔ اور اسطوانہ کے رخ n پر کا دباؤ d کے مساوی لیا جاسکے۔ اور اسی طرح رخ q پر کے دباؤ کو لے سکیں

$(d + م)$

اگر اسطوانہ n ق کی اوسط کثافت θ ہو تو اسکی کمیت $= \theta \times م$ مفل لا اور

گزرنے والی سمتوں میں سے اُس سمت میں کثافت زیادہ سے زیادہ سرعت سے بلیتی ہے جو اس نقطہ میں سے گزرنے والی یکساں کثافت والی سطح پر عماد ہو۔ نیز اس سطح کے ماسی مستوی میں جو سمتیں ہیں اُن میں سے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم کثافت کے تغیر والی سمتیں وہ ہیں جو صدری تراشوں کے ماسوں پر منطبق ہونی ہیں۔



- ۵۔ رفتار کی اکائی ہم فٹ فی ثانیہ ہے پانی معیاری چیز ہے اور قوت کی اکائی ۱۲۵ پونڈ وزن ہے۔ وقت اور طول کی اکائیاں معلوم کرو۔
- ۶۔ پانی کے ایک کعب فٹ کے وزن کو تعبیر کرنے والا عدد اس کے حجم کو ظاہر کرنے والے عدد کا $\frac{1}{16}$ اور اس کو ایک فٹ اٹھانے میں کئے گئے کام کو ظاہر کرنے والے عدد کا $\frac{1}{16}$ ہے۔ طول، کمیت اور وقت کی اکائیاں دریافت کرو۔
- ۷۔ اگر گرہ ہوائی کا دباؤ، دباؤ کی ایکائی، آواز کی رفتار، رفتار کی اکائی، اسراع بہ جاذبہ ارض اسراع کی اکائی ہو تو قوت کی اکائی تقریباً معلوم کرو۔
- ۸۔ اگر فٹ اور ب ثانیہ طول اور وقت کی اکائیاں ہیں اور پانی کی کثافت معیاری کثافت ہو تو ρ اور β میں ربط معلوم کرو کہ مساوات $\rho = \beta \gamma$ سے کسی چیز کا وزن پونڈوں میں معلوم ہو سکے۔
- ۹۔ فٹ فی ثانیہ کی رفتار رفتار کی اکائی اور گرنے والے جسم کا اسراع اسراع کی اکائی اور ایک ٹن کمیت کی اکائی ہو تو پانی کی کثافت معلوم کرو۔
- ۱۰۔ کچھ مانع ایک مخروط میں جس کا محور انتصابی اور اس نیچے کی طرف ہے ڈال دیا گیا ہے۔ اس مانع کے کسی نقطہ پر کثافت سطح پر کی کثافت سے بقدر ایک ایسی مقدار کے بڑی ہے جو ایسے بدلتی ہے جیسے سطح سے نقطہ کی گہرائی۔ ثابت کرو کہ جب مانع کو ملانے سے اس کی کثافت یکساں ہو جائے تو یہ کثافت اصلی حالت پر اس نقطہ پر کی کثافت کے مساوی ہے جس کی گہرائی مخروط کے محور کی ایک چوتھائی کے مساوی ہو۔
- ۱۱۔ کثافت والے مانع سے بھرے ہوئے برتن میں سے مانع کا $\frac{1}{16}$ حصہ نکال دیا گیا ہے اور اس کو نہ کثافت والے مانع سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر اس عمل کو ہم مرتبہ دہرایا جائے تو برتن میں سے مانع کی کثافت معلوم کرو۔
- ایک برتن کا حجم γ ہے۔ اس کو کثافت والے مانع سے بھر دیا گیا ہے۔ اگر نہ کثافت والے مانع کا حجم برائے نامی صغیر قطروں میں اس کے اندر شپک جائے تو حاصل شدہ مانع کی کثافت معلوم کرو۔
- ۱۲۔ ایک مانع کی کثافت نقطہ بہ نقطہ بدلتی ہے۔ ثابت کرو کہ ایک معلومہ نقطہ میں سے

$$= - (د فرج = - ک م فرج) اگر د = م$$

$$= م کوک = ح د کوک = ح$$

اگر چیک برتن کے گروہ کے ہوائی کرہ کے موجودگی میں وقوع پذیر ہوئی ہے مثلاً اگر ایک اسطوانہ میں فشار سے ذریعہ گیس بند کی گئی ہو تو ہوائی کرہ کا دباؤ چیک کے کام میں مدد دیتا ہے۔ اس طرح اگر کرہ ہوائی کے دباؤ پر ابھرتی حجم ہو تو حجم میں دبانے کے لئے بیرونی کام کر گیا وہ

$$= - (د - م) فرج ، جہاں ح د = ح$$

$$= ح کوک = ح - (ح - ح)$$

مثلاً

(ان مثالوں میں ج ۲ کے مساوی لیا گیا ہے جبکہ فٹ اور ثانیہ اکائیاں ہوں)
۱۔ مستطیل رقبہ ا ب ج د سیالی دباؤ کے زیر عمل ہے۔ ا ب ثابت خط مستقیم ہے۔ اور رقبہ پر کا دباؤ طول ب ج (لا) کا ایک دیا ہوا متغیر (د) ہے ثابت کر د کہ ج د کے کسی نقطہ پر دباؤ $\frac{1}{2}$ ہے جہاں $1 = ا ب$ ۔

اگر ا ب ایک ثابت نقطہ ہو اور ا ب ، د کی سمتیں ثابت ہوں اور اگر ا ب = لا اور
د = م تو ج پر دباؤ $\frac{1}{2}$ فرج

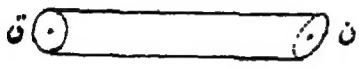
۲۔ مساوات و = ج ث ح میں اگر قوت کی اکائی ۱۰۰ پونڈ وزن طول کی اکائی ۲ فٹ اور دقت کی اکائی ۱۰ ثانیہ ہو تو پانی کی کثافت معلوم کرو۔

۳۔ اگر دقت کی اکائی ایک دقیقہ طول کی اکائی ایک گز ہو، اور اگر معیاری شے کے ۱۵ مکعب انچ کا وزن ۲۵ اونس ہو تو قوت کی اکائی دریافت کرو۔

۴۔ مساوات و = ج ث ح میں وقت کی اکائی میں ثانیوں کی تعداد طول کی اکائی میں فٹوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ قوت کی اکائی ۵۰ پونڈ وزن ہے اور معیاری چکر کے ایک مکعب فٹ کا وزن ۱۳۵۰۰ اونس ہے۔ وقت کی اکائی معلوم کرو۔

اس کے سرسوں پر کے دباؤ اور منحنی سطح کا دباؤ اور وہ بیرونی قوتیں جو اس پر عمل کرتی ہیں ایک متوازن قوتوں کے نظام کو تعمیر کرتی ہیں۔

فرض کرو کہ دباؤ نقاط ق اور ن پر کے دباؤ ہیں۔ اور اسطوانہ کی تراش ق کا رقبہ عہ اور تراش ن کا رقبہ عہ ہے۔



یخ ن پر کے دباؤ عہ کو اگر اسطوانہ کے

محور کے متوازی تحلیل کریں تو جزو تحلیل دے کے مساوی ہے۔ اور اسلئے

$$دے = دے = ق ن \text{ کے متوازی قوت عالمہ کا جزو تحلیل}$$

نقطہ ن میں سے گزرنے والے مستوی کی سمت خواہ کچھ ہی ہو یہ قوت عالمہ جبکہ اسطوانہ کا نصف قطر

لا انتہا چھوٹا ہو بالآخر اسطوانہ کے حصے ق ن پر کی قوت عالمہ کے مساوی ہو جاتی ہے

جبکہ یہ حصہ ایسے مستوی کے ذریعہ کاٹا جائے جو نقطہ ن میں سے گزرے اور محور پر عمود ہو۔

پس قوت عالمہ ہے

$$س ن ث عہ فرلا$$

جہاں ک ہیں وہ قوت ہے جو سیالی ذرہ ک پر نقطہ ق سے فاصلہ لا پر عمل کرتی ہے۔ اسلئے

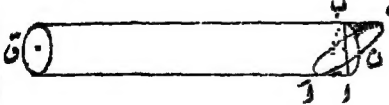
$$د = د + س ن ث فرلا$$

اسے حسب ذیل تشریح ثبوت کے اس حصہ کو مکمل کرو سہ گی۔

فرض کرو کہ دباؤ ب نقطہ ب میں سے گزرنے والے مستوی ہیں۔ ث، ق علی الترتیب ان دباؤ

ب ن ب کی اسطوانہ کثافتیں ہیں۔ س، س سیال کے ان حصوں پر عمل کرنے والی قوتوں کے اسراع ہیں۔

توق دباؤ اور ق دباؤ (جن کے حجم مساوی ہیں) ب



پر عمل کرنے والی قوتوں کا فرق

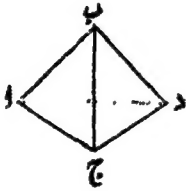
$$= و ن د اور ب ن ب پر عمل کر نیوالی قوتوں کا فرق$$

$$= (س ن ث - س ب ث) \times حجم د ن د$$

$$= صحت (س ن ث) \times د - صحت (س ب ث) \times د = د (د - د) (عہ تراش ق کا رقبہ ہے)$$

اول الذکر قوتیں رخوں کے رقبوں پر منحصر ہونے کی وجہ سے ایسے بدلتی ہیں جیسے مجسم (جسکو ہڈیات یا متجانس فرض کیا گیا ہے) کے کنارے کا مربع اور ثانی الذکر قوت حجم اور کثافت پر منحصر ہونے کی وجہ ایسی بدلتی ہے جیسے مجسم کے کنارے کا مکعب۔ اور اس لئے اگر مجسم کو لا انتہا گھٹا دیا جائے جیسا کہ اس کی شکل ہمیشہ متشابه رہے تو موخر الذکر قوت بمقابلہ رخوں پر کے دباؤ کے معدوم ہو جاتی ہے۔ اور اس لئے یہ دباؤ خود متوازن قوتوں کا ایک نظام پیدا کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ رخوں W اور B ج اور B ج پر کے دباؤ کی شرحیں علی الترتیب d کے تعبیر ہوتی ہیں کنارے d کے متوازی ان قوتوں کو تحلیل کرو۔ تو چونکہ رقبہ W اور B ج کے نکل d پر کے علی القواہم مستوی پر وہی ہیں (فرض کرو کہ ہر ایک عد کے مساوی ہے)۔



$$d_W = d_B$$

$$d = d$$

اور اسی طرح یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ دوسرے دو رخوں پر کے دباؤ میں سے ہر ایک d یا d کے مساوی ہے۔

اب چونکہ دو اربعۃ السطوح کے رخ کسی سمت میں لئے جاسکتے ہیں اس لئے کسی نقطہ پر کا دباؤ ہر سمت میں وہی ہوتا ہے۔

(۴)

یہ مسئلہ اس وقت بھی درست رہتا ہے جبکہ سیال متحرک ہو۔ کیونکہ ڈی ایلمبرٹ کے اصول کے مطابق اگر موثر قوتوں کی سمت الٹ دی جائے تو یہ بیردنی یا عالم قوتوں کے ساتھ مل کر رخوں پر کے دباؤ کے ساتھ متوازن ہونگیں۔ اور موثر قوتیں اسی رقبہ کی چھوٹی مقدار میں ہیں جس رقبہ کی عامل قوتیں اور اس لئے بمقابلہ دباؤں کے معدوم ہو جاتی ہیں۔ مسئلہ بالا کا حسب ذیل ثبوت کوششی کی مثالوں سے لیا گیا ہے۔

فرض کرو کہ N اور Q سیال میں ایک دوسرے سے محدود فاصلے پر دو نقطے ہیں۔ محور N کے گرد ایک بہت چھوٹے نصف قطر کا اسطوانہ بناؤ۔ Q میں سے ایک مستوی N کے علی القواہم کھینچو اور N میں سے کوئی مستوی گزارو اور N کی کیت کے توازن پر غور کرو۔

خالی کر کے وزن کرنے سے معلوم ہو سکتا ہے نیز جوار بھاد کے وقوع سے یہ معلوم ہوتا ہے کہ سیالات پر سوسن اور چاند کی کششیں اسی طرح عمل کرتی ہیں جس طرح کہ زمین کی کشش۔ ان واقعات کی بنا پر نیز اس طرح کے اور واقعات کی بنا پر ان لیا جاتا ہے کہ تمام شمس کے سیالات قانون تجاذب کے تابع ہیں۔ یعنی اس قانون کے بموجب وہ دوسری مادی اشیاء پر کشش کا عمل کرتے ہیں امدان پر بھی ان مادی اشیاء کی کشش کا عمل ہوتا ہے۔

سیالی دباؤ کی پیمائش

۵۔ فرض کرو کہ کچھ سیالی مادہ بعض قوتوں کے زیر عمل ساکن ہے اور ایک مستوی سطح سیال کے ساتھ تماس رکھتی ہے اور اس کے رقبہ ۱ پر جو سیال کا عمل ہے اس کے خلاف توازن پیدا کرنے کے لئے سطح پر قوت ق لگائی پڑتی ہے۔

اگر سیال کا عمل ۱ پر کیساں ہو تو ق سے یہ سیالی دباؤنی اکائی رقبہ تعمیر ہوگا اگر دباؤ کیساں نہ ہو تو رقبہ ۱ کے ہر نقطہ پر اسکو متغیر خیال کیا جائیگا اور اگر ایک نقطہ کے گرد کے چھوٹے رقبہ ۲ پر قوت عمل کرے تو $\frac{2}{1}$ سے تقریباً دباؤ کی شرح رقبہ ۲ پر تعمیر ہوگی۔

اگر عکولاً انتہا کم کر دیا جائے تو فرض کرو کہ انتہا میں $\frac{2}{1} = d$ تب بطور تعریف کے اس d کو ہم نقطہ زیر بحث پر دباؤ کا ناپ قرار دینگے۔ d وہ قوت ہوگی جو اکائی رقبہ پر لگائی جائیگی اگر اس اکائی رقبہ پر شرح دباؤ کیساں خیال کی جائے اور نقطہ زیر بحث پر کے دباؤ کے مساوی ہو پس اگر کسی نقطہ پر دباؤ d ہو تو اس کے گرد کے چھوٹے رقبہ ۲ پر قوت $d \times 2$ جبہ عمل کریگی جہاں جبہ انتہا میں d کے مقابلہ میں صفر ہو جاتا ہے جبکہ d (اور اسکی وجہ سے d صفر ہو جائے)۔

۶۔ ساکن سیال کے کسی نقطہ پر دباؤ ہر سمت میں دہی ہوتا ہے۔ سیال کے خواص میں یہ خاصیت سب سے اہم ہے اس کا ثبوت سیال کی بنیادی خاصیت سے حسب ذیل طریقہ سے اخذ کیا جاسکتا ہے۔

اگر ہم سیال کے ایک چھوٹے ذواربعۃ السطوح کے توازن پر غور کریں تو یہ معلوم ہوگا کہ اس کے رخوں پر کے دباؤ اور اس کی کثیت پر کی قوت عالمہ ملکر متوازن قوتوں کا ایک نظام پیدا کرتی ہیں۔

